SINTEZE
LYCEUM

D. M. BĂTINEȚU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA A II-a DE LICEU

ŞIRURI

EDITURA ALBATROS

Referenți:

dr. ION CHIȚESCU, asistent universitar
LUCIAN AGACHI, profesor

BUCUREȘTI • 1979

Asistăm de mai multă vreme la un proces continuu de modernizare și perfecționare a învățământului de toate gradele, acest lucru reflectîndu-se pregnant în învățămîntul matematic.

Schimbările structurale ale învățămîntului au dus la unele modificări ale programei analitice, iar aceasta, evident, la apariția unor manuale, a unor noi culegeri de probleme, care să corespundă nu numai noii programe, ci și tendinței actuale de modernizare a învățămîntului matematic.

Este cunoscută importanța rezolvării de exerciții și probleme pentru buna asimilare a oricărui domeniu al matematicii, deci cu atît mai mult atunci cînd este vorba de un domeniu cu un caracter mai abstract, așa cum este analiza matematică.

Pînă în prezent, nu există în limba română o culegere de probleme de șiruri destinată elevilor, probleme de acest tip apărînd doar sporadic în alte cărți.

Menționăm că înțelegerea și utilizarea noțiunii de limită (de limită a unui șir) este fundamentală pentru parcurgerea oricărui capitol al analizei matematice.

Considerăm că prezenta lucrare se înscrie în coordonatele modernizării învățămîntului matematic, constituind o încercare de a umple golul de culegeri de probleme în ce privește capitolul șiruri.

Prin lucrarea de față punem la dispoziția elevilor liceelor noastre o suită de aplicații menite să consolideze pregătirea lor matematică și — prin problemele alese — să contribuie la

însușirea metodelor și îndemînării în rezolvarea problemelor de analiză matematică.

Unele probleme au un caracter mai dificil și necesită un deosebit efort de concentrare din partea celui care le abordează. Pentru a face o ierarhizare și pentru a veni în sprijinul celor care vor utiliza culegerea, am împărțit problemele în două categorii: unele prevăzute numai cu numărul de ordine, care pot fi abordate de toți elevii, iar altele prevăzute cu steluță care fie că depășesc programa de liceu, fie că sînt mai dificile și sînt recomandate elevilor mai avansați sau pot fi abordate în cercurile de elevi.

Lucrarea începe cu capitolul 0 în care sînt prezentate unele definiții, teoreme, propoziții, corolare, notații și abrevieri, necesare în capitolele următoare. În acest capitol se folosesc din plin simbolurile logicii matematice, se definește ce înseamnă o **m***-proprietate pentru un șir, ceea ce este foarte util în capitolele următoare. Capitolul 1, este destinat problemelor rezolvate, capitolul 2, problemelor propuse, capitolul 3, problemelor alese, iar capitolul 4, temelor pentru cercurile de elevi.*

Pe lîngă problemele proprii, propuse de autor în cursul anilor în „Gazeta Matematică", culegerea cuprinde și probleme propuse de alți autori în aceeași gazetă, sau în alte publicații, probleme propuse la diferite concursuri și olimpiade matematice din țară sau străinătate, probleme noi, nepublicate încă de autorul lucrării.

O mare parte dintre problemele propuse în „Gazeta Matematică" de autorul lucrării de față au fost introduse în culegeri de probleme de matematică din țară sau străinătate.

Unele articole sau note matematice publicate de autorul prezentei lucrări în „Gazeta Matematică", au constituit punctul de plecare pentru întocmirea, de către elevi, a unor lucrări (în cadrul cercurilor de elevi din țară) care au primit premii sau mențiuni la „Sesiunea Științifică pe țară a elevilor" din anul 1977.

Am încercat ca, prin problemele prezentate, să oferim cititorului o imagine de ansamblu asupra conținutului și metodelor specifice acestui capitol al matematicii liceale. Astfel, în intenția noastră, această carte trebuie să constituie un îndreptar în pătrunderea internă a unor noțiuni și teoreme din matematica de liceu, o treaptă superioară de antrenament în vederea atacării, cu succes, a altor probleme specifice analizei matematice.

Practica noastră de zi cu zi în sălile de seminar sau în cadrul orelor ținute la liceul „MATEI BASARAB" din București, ne-a demonstrat, în repetate rînduri, că unii elevi sau absolvenți de liceu au numeroase lacune în ceea ce privește înțelegerea unor fapte matematice esențiale, confundă teorema directă cu cea reciprocă, le este aproape imposibil să practice un raționament prin reducere la absurd, nu înțeleg de ce o anume proprietate trebuie demonstrată prin metoda inducției matematice etc. Considerăm că prin problemele prezentate acționăm tocmai în sensul eliminării acestor lacune.

Problemele din prezenta lucrare trebuie atacate cu răbdare, cu creionul în mînă, apelîndu-se la soluțiile noastre numai în ultimă instanță. Sîntem convinși că rezolvarea independentă a unora din probleme va da rezolvitorului satisfacții nebănuite.

Pentru ca lucrarea să fie accesibilă unui număr cît mai mare de cititori, am preferat să dăm tuturor problemelor soluția completă, în loc de un răspuns care, în general, nu dezvoltă gustul și aptitudinile elevilor și care, uneori, conduce la grave confuzii.

Apreciem că, prin diversitatea și noutatea problemelor, precum și prin modul variat de rezolvare, lucrarea va interesa atît cercurile largi ale tineretului școlar, cadrele didactice care predau în licee, precum și pe cei care vor să-și completeze cunoștințele introductive în analiza matematică.

CAPITOLUL 0

NOTAȚII ȘI ABREVIERI, DEFINIȚII, TEOREME, PROPOZIȚII, COROLARE

$\Rightarrow$: semnul implicației logice ($p \Rightarrow q$ înseamnă că dacă propoziția p este adevărată, atunci și propoziția q este adevărată);

$\Leftrightarrow$: semnul echivalenței logice (dacă și numai dacă; atunci și numai atunci; necesar și suficient; $p \Leftrightarrow q$ înseamnă $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow p$);

$(\exists)$: există (cuantificatorul existențial: $(\exists)x \in A$ înseamnă că există cel puțin un $x \in A$);

$(\exists!)$: există și este unic ($(\exists!)x \in A$ înseamnă că există un singur $x \in A$);

$(\forall)$: oricare ar fi (cuantificatorul universal); $(\forall)x \in A$ înseamnă oricare ar fi $x \in A$;

$\in$: semnul apartenenței ($x \in A$ înseamnă x aparține lui A);

$\notin$: semnul neapartenenței ($x \notin A$ înseamnă x nu aparține lui A);

$(\bar{\exists})$: nu există ($(\bar{\exists})x \in A$ înseamnă că nu există nici un element $x \in A$);

$\vee$: conectorul logic „sau" (semnul disjuncției logice), (dacă p, q sînt propoziții atunci $p \vee q$ este propoziția p sau q);

$\wedge$: conectorul logic „și" (semnul conjuncției logice), (dacă p, q sînt propoziții atunci $p \wedge q$ este propoziția p și q);

$\neg$: conectorul logic „non" (semnul negației logice), (dacă p este o propoziție atunci $\neg p$ notat uneori și $\bar{p}$ este propoziția non p);

$\rightarrow$: conectorul logic „implică" (dacă p, q sînt propoziții, atunci $p \rightarrow q$ este propoziția $\neg p \vee q$);

$\leftrightarrow$: conectorul logic „echivalent" (dacă p, q sînt propoziții atunci $p \leftrightarrow q$ citit p echivalent q este propoziția $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$);

$\cup$, $\cap$: reuniune, respectiv intersecție de mulțimi;

$\setminus$: diferență de mulțimi;

$\emptyset$: mulțimea vidă;

$\mathcal{P}(A)$: mulțimea părților mulțimii A sau familia tuturor submulțimilor mulțimii A;

N: mulțimea numerelor naturale, adică:
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$;

Z: mulțimea numerelor întregi, adică:
$\mathbf{Z} = \{..., -n, ..., -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$;

Q: mulțimea numerelor raționale:

$$\mathbf{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\};$$

R: mulțimea numerelor reale;

C: mulțimea numerelor complexe;

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$;

$\subset$: semnul incluziunii $(A \subset B \Leftrightarrow (\forall) x \in A \Rightarrow x \in B)$;
Dacă $A \subset \mathbf{R}$ atunci $A_+ = \{x \in A \mid x \geqslant 0\}$, $A_- = \{x \in A \mid x \leqslant 0\}$, $A^* = \{x \in A \mid x \neq 0\}$;
Dacă A și B sînt mulțimi oarecare atunci $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ desemnează produsul cartezian al mulțimilor A și B. Dacă $A = B$ atunci $A \times A$ se notează A^2;

$[\cdot]_*: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ unde $[x]_* \leqslant x < [x]_* + 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ este funcția *parte întreagă*;

$\{\cdot\}_*: \mathbf{R} \to [0, 1)$ cu $\{x\}_* = x - [x]_*$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ este funcția *parte fracționară*;

$!: \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ cu $0! = 1$ și $x! = 1 \cdot 2 \ldots x$, $(\forall)x \in \mathbf{N}^*$ este funcția *factorial*;

$\operatorname{sign}: \mathbf{R} \to \{1, 0, 1\}$ cu:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

este funcția *semn*; *(signum)*;

$h: \mathbf{R} \to \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ cu:

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in \mathbf{R}_-^* \\ \frac{1}{2} \text{ dacă } x = 0 \\ 1 \text{ dacă } x \in R_+^* \end{cases}$$

este funcția lui HEAVISIDE[1];

$1_A: A \to A$ cu $1_A(x) = x$, $(\forall)x \in A$ este funcția *identică* a mulțimii A;

Dacă $f: X \to Y$ și $g: Y \to U$ atunci *compunerea* lor o notăm $g \circ f: X \to U$ și $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(\forall)x \in X$;

δ_{ij}: este simbolul lui KRONECKER[2]: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j. \end{cases}$

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ atunci:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

este *media aritmetică* a numerelor a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

[1] Heaviside, Oliver (1850–1925) — fizician englez.
[2] Kronecker, Leopold (1823–1891) — matematician german.

este *media geometrică* a acestor numere, iar:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

este *media lor armonică*;

Este cunoscută inegalitatea:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant A(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

a. î. înseamnă „astfel încît";

Dacă $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ notăm:

$$\exp_a x = a^x, \ \mathrm{sh}_a x = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \ \mathrm{ch}_a x = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{th}_a x = \frac{\mathrm{sh}_a x}{\mathrm{ch}_a x},$$

iar dacă $x \in \mathbf{R}^*$ atunci $\mathrm{cth}_a x = \frac{\mathrm{ch}_a x}{\mathrm{sh}_a x}$. În cazul în care $a = e$ avem:

$$\exp_e x = \exp x, \ \mathrm{sh}_e x = \mathrm{sh}\, x, \ \mathrm{ch}_e x = \mathrm{ch}\, x, \ \mathrm{th}_e x = \mathrm{th}\, x, \ \mathrm{cth}_e x = \mathrm{cth}\, x.$$

$\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor de numere reale;

$\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor mărginite de numere reale;

$\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor de numere reale care au limită;

$\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor convergente de numere reale, adică au limită finită;

$\mathcal{D}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor divergente de numere reale;

$\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$: mulțimea tuturor șirurilor fundamentale (CAUCHY[1]) de numere reale;

$\mathcal{C}_1$: O mulțime A se numește *numărabilă* $\Leftrightarrow$ există o bijecție $f : A \to \mathbf{N}$;

---

[1] Cauchy, Augustin Louis, (1789—1857) — matematician francez.

$\mathbf{d_2}$: O mulțime A se numește *infinită* $\Leftrightarrow (\exists)\ B \subset A$ (incluziunea fiind strictă) și o bijecție $f : B \to A$;

$\mathbf{d_3}$: O mulțimea A este *finită* $\Leftrightarrow$ A nu este infinită ($d_3 \Leftrightarrow \bar{d}_2$);

$\mathbf{d_4}$: O mulțimea A este *cel mult numărabilă* $\Leftrightarrow$ este finită sau numărabilă ($d_4 \Leftrightarrow d_1 \vee d_3$);

$\mathbf{p_1}$: Mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă;

$\mathbf{p_2}$: Mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale este infinită dar nu este numărabilă (are puterea *continuului*);

$\mathbf{p_3}$: Mulțimea $M = \{1, 2, ..., n\}$ este finită;

$\mathbf{p_4}$: Mulțimile $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ și $\mathbf{Q}$ sînt cel mult numărabile;

$\mathbf{d_5}$: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ este *mărginită* $\Leftrightarrow (\exists) M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $|x| \leqslant M$, $(\forall) x \in A$;

$\mathbf{d_6}$: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ este *nemărginită* $\Leftrightarrow (\forall) M \in R_+^*$, $(\exists) x \in A$ a.î. $|x| > M$ ($d_6 \Leftrightarrow \bar{d}_5$);

$\mathbf{d_7}$: Se numește *vecinătate* a unui punct $x_0 \in \mathbf{R}$ orice mulțime $V \subset \mathbf{R}$ cu proprietatea că $(\exists) a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a. î. $x_0 \in (a, b) \subset V$;

$\mathbf{p_5}$: Orice interval deschis (a, b) cu proprietatea că $x_0 \in (a, b)$, este o vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbf{R}$;

$\mathbf{d_8}$: Vecinătățile de forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ cu centrul în $x_0 \in \mathbf{R}$ și de rază $r \in \mathbf{R}_+^*$ se numesc *vecinătăți simetrice* ale lui $x_0 \in \mathbf{R}$;

$\mathbf{p_6}$: $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y \Rightarrow (\exists)$ o vecinătate U a lui x și o vecinătate V a lui y astfel încît $U \cap V = \emptyset$ (dreapta reală $\mathbf{R}$ este un spațiu *separat* sau spațiu HAUSDORFF[1]);

$\mathbf{d_9}$: Fiind dată $A \subset \mathbf{R}$, un punct $x_0 \in A$ se numește *punct interior* lui $A \Leftrightarrow (\exists)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ cu proprietatea că $x_0 \in (a, b) \subset A$;

$\mathbf{d_{10}}$: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește *mulțime deschisă* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)\ x \in A$, x este punct interior lui A;

---

[1] Hausdorff, Felix (1868–1942) – matematician german.

$\mathbf{p_7}$: Mulțimile $\emptyset$, $\mathbf{R}$ precum și intervalele (a, b), $(c, +\infty)$, $(-\infty, d)$ sînt mulțimi deschise, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și $a < b$;

$\mathbf{d_{11}}$: Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ se numește *punct exterior* mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a. î. $x_0 \in (a, b) \subset \mathbf{C}_A$;

$\mathbf{d_{12}}$: Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ se numește *punct aderent* mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall) V_{x_0}$ (vecinătate a lui x_0), $V_x \cap A \neq \emptyset$;

$\mathbf{d_{13}}$: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește *mulțime închisă* $\Leftrightarrow (\forall) x$ punct aderent al mulțimii A rezultă $x \in A$;

$\mathbf{d_{14}}$: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește *compactă* $\Leftrightarrow A$ este mulțime închisă și mărginită $(d_{14} \Leftrightarrow d_5 \wedge d_{13})$;

$\mathbf{d_{15}}$: Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ nu este punct aderent mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists) V_{x_0}$ a. î. $V_{x_0} \cap A = \emptyset$ $(d_{15} \Leftrightarrow \bar{d}_{12})$;

$\mathbf{d_{16}}$: Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ este *punct de acumulare* al mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall)\, V_{x_0}$ avem $(V_{x_0} - \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$;

$\mathbf{d_{17}}$: Un punct $x_0 \in R$ nu este punct de acumulare al mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, V_{x_0}$ a. î. $(V_{x_0} - \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ $(d_{17} \Leftrightarrow \bar{d}_{16})$;

$\mathbf{p_8}$: Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ este punct de acumulare al mulțimii $A \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow$ în orice vecinătate V_{x_0} există o infinitate de puncte din A;

$\mathbf{p_9}$: Orice punct $x \in \mathbf{R}$ este un punct de acumulare al mulțimilor $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

$\mathbf{c_1}$: Orice mulțime $A \subset \mathbf{R}$ care are cel puțin un punct de acumulare este infinită;

$\mathbf{c_2}$: O mulțime finită nu are puncte de acumulare;

$\mathbf{t_1}$: (WEIERSTRASS[1]—BOLZANO[2]). Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare;

---

[1] Weierstrass, Karl (1815—1897) — matematician german.

[2] Bolzano, Bernhard (1781—1848) — filozof și matematician ceh.

p_{10}: O ice punct de acumulare x al mulțimii A este un punct aderent lui A. Nu orice punct aderent lui A este un punct de acumulare al lui A;

d_{18}: Un punct $x_0 \in A$ care nu este punct de acumulare al mulțimii A se numește *punct izolat* al lui A;

d_{19}: O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $x \in A$, x este punct izolat al lui A se numește *mulțime discretă*;

p_{11}: Mulțimile, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ sînt mulțimi discrete;

d_{20}: Se numește *relație* (sau *corespondență*) între două mulțimi A și B, un triplet $\rho = (G, A, B)$, unde $G \subset A \times B$. Spunem în acest caz că ρ este o relație de *sursă* A, *adresă* B și *grafic* G. Dacă $A = B$, vom spune că relația $\rho = (G, A, A)$ este o relație *în* A și o notăm $\rho = (G, A)$, unde $G \subset A^2$.

Dacă două elemente $x \in A$ și $y \in B$ sînt în relația $\rho = (G, A, B)$ vom scrie aceasta $(x, y) \in G$ sau $x\rho y$. Dacă elementele $x \in A$ și $y \in B$ nu sînt în relația $\rho = (G, A, B)$ vom scrie aceasta $(x, y) \notin G$ sau $x\bar{\rho}y$;

d_{21}: Relația $\rho = (G, A)$ se numește *relație de ordine (parțială)* în A dacă și numai dacă:

0). $(x, x) \in G$, $(\forall) x \in A$, adică ρ este *reflexivă*;

00). $(x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$ adică ρ este *tranzitivă*;

000). $(x, y) \in G \wedge (y, x) \in G \Rightarrow x = y$ adică ρ este ***antisimetrică.***

Dacă $G = A^2$ atunci ρ este o relație de *ordine totală* pe A. Perechea (A, ρ) cu ρ satisfăcînd definiția d_{21} se va numi o *mulțime ordonată* sau un *spațiu ordonat*;

p_{12}: Perechile $(\mathbf{R}, \leqslant)$, $(\mathbf{Q}, \leqslant)$, $(\mathbf{Z}, \leqslant)$ și $(\mathbf{N}, \leqslant)$ sînt mulțimi ordonate;

d_{22}: O mulțime ordonată (A, ρ) se numește *mulțime dirijată* de relația $\rho \Leftrightarrow (\forall) x, y \in A$, $(\exists) z \in A$ astfel încît $(x, z) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho$;

$\mathbf{d_{23}}$: Fiind dată o mulțime dirijată X, se numește *șir generalizat* de elemente ale unei mulțimi A, orice funcție $f: X \to A$. Pentru orice $x \in X$ vom nota $f(x) = a_x$ și-l vom numi *termenul general* al șirului generalizat. Uneori, pentru desemnarea șirului generalizat $f: X \to A$, vom întrebuința și notația $(a_x)_{x \in X}$ sau notația $\{a_x\}_{x \in X}$;

$\mathbf{d_{24}}$: Dacă $X = \mathbf{N}$ atunci șirul generalizat corespunzător $f: \mathbf{N} \to A$ se va numi *șir simplu* sau, obișnuit, *șir*. În acest caz, șirul se mai notează: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ și prescurtat $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sau $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sau $(a_n)_{n \geq 0}$ unde $a_n = f(n)$ este termenul general al șirului;

$\mathbf{d_{25}}$: Șirul generalizat $(a_x)_{x \in X}$ se numește *subșir generalizat* al șirului generalizat $(a_y)_{y \in Y} \Leftrightarrow (\exists)\, g: X \to Y$ cu proprietățile:

i). $a_x = a_{g(x)}$, $(\forall) x \in X$;

ii). $(\forall) y_0 \in Y$, $(\exists) x_0 \in X$ astfel încît $x_0 \rho x \Rightarrow y_0 \rho g(x)$;

$\mathbf{d_{26}}$: Dacă $X = \mathbf{N}$ atunci se numește *subșir* al șirului $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ șirul $(a_{g(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ unde $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ este o funcție strict crescătoare. Subșirul $(a_{g(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ se mai notează $(a_{k_n})_{n \in \mathbf{N}}$ dacă înseamnă $g(n)$ cu k_n, $n \in \mathbf{N}$.

În definițiile și afirmațiile care urmează vor fi considerate numai șiruri generalizate de numere reale și șiruri de numere reale, adică vom considera $A = \mathbf{R}$;

$\mathbf{d_{27}}$: Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este *mărginit* $\Leftrightarrow (\exists) M \in \mathbf{R}_+^*$ a.î. $|a_n| \leq M$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{d_{28}}$: Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este *nemărginit* $\Leftrightarrow (\forall) M \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n \in \mathbf{N}$ a.î. $|a_n| > M$ ($d_{28} \Leftrightarrow \bar{d}_{27}$);

$\mathbf{d_{29}}$: Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se numește $\mathbf{m}$-*strict crescător*, $m \in \mathbf{N}$ $\Leftrightarrow (\forall) n \in \mathbf{N}$, $n \geq m$ atunci $a_n < a_{n+1}$. Un șir $\mathbf{0}$-*strict crescător* se numește *strict crescător*;

$\mathbf{d_{30}}$: Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nu este $\mathbf{m}$-*strict crescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists) n \in \mathbf{N}$, $n \geq m$ astfel încît $a_n \geq a_{n+1}$ ($d_{30} \Leftrightarrow \bar{d}_{29}$);

$\mathbf{d_{31}}$: Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se numește $\mathbf{m}$-*strict descrescător*, $m \in$ $\in \mathbf{N} \Leftrightarrow (\forall) n \in \mathbf{N}$, $n \geq m$ atunci $a_n > a_{n+1}$. Un șir $\mathbf{0}$-*strict descrescător* se va zice *strict descrescător*;

$\mathbf{d_{32}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*strict descrescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)n \in \mathbf{N}, n \geqslant m$ astfel încît $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(d_{32} \Leftrightarrow \bar{d}_{31})$;

$\mathbf{d_{33}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care este **m**-*strict crescător* sau **m**-*strict descrescător* se numește **m**-*strict monoton*. Un și **0**-*strict monoton* se numește *strict monoton* $(d_{33} \Leftrightarrow d_{29} \vee d_{31})$;

$\mathbf{d_{34}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*strict monoton*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\, n, p \in \mathbf{N}$, $n, p \geqslant m$, $n \neq p$ astfel încît $a_n \leqslant$ $\leqslant a_{n+1}$ și $a_p \geqslant a_{p+1}$ $(d_{34} \Leftrightarrow \bar{d}_{33} \Leftrightarrow \bar{d}_{29} \wedge \bar{d}_{31})$;

$\mathbf{d_{35}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește **m**-*crescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)n \in \mathbf{N}, n \geqslant m$ avem $a_n \leqslant a_{n+1}$. Un șir **0**-*crescător* se va numi *crescător*;

$\mathbf{d_{36}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*crescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow (\exists)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ astfel încît $a_n > a_{n+1}$ $(d_{36} \Leftrightarrow \bar{d}_{35})$;

$\mathbf{d_{37}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește **m**-*descrescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m \Rightarrow a_n \geqslant a_{n+1}$. Un șir **0**-*descrescător* se va numi *descrescător*;

$\mathbf{d_{38}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*descrescător*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow (\exists)\, n \in$ $\in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ a. î. $a_n < a_{n+1}$ $(d_{38} \Leftrightarrow \bar{d}_{37})$;

$\mathbf{d_{39}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește **m**-*constant* (*staționar*), $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow (\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m \Rightarrow a_n = a_{n+1}$. Un șir **0**-*constant* se va numi *constant*;

$\mathbf{c_3}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este **m**-*constant*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este **m**-*descrescător* și **m**-*crescător* $(d_{39} \Leftrightarrow d_{37} \wedge d_{35})$;

$\mathbf{d_{40}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*constant*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow (\exists)\, n \in$ $\in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ astfel încît $a_n \neq a_{n+1}$ $(d_{40} \neq \bar{d}_{39})$;

$\mathbf{d_{41}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește **m**-*monoton*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este **m**-*crescător* sau **m**-*descrescător* sau **m**-*constant*. Un șir **0**-*monoton* se va numi *șir monoton* $(d_{41} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow d_{35} \vee d_{37} \vee d_{39})$;

$\mathbf{d_{42}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*monoton*, $m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*crescător* și nu este **m**-*descrescător* și nu este **m**-*constant* $(\bar{d}_{42} \Leftrightarrow \bar{d}_{35} \wedge \bar{d}_{37} \wedge \bar{d}_{39})$;

$\mathbf{d_{43}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește **m**-*periodic*, $m \in N$ de perioadă $t \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow a_{n+t} = a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$.

Un șir **0**-*periodic* de perioadă $t \in \mathbf{N}^*$ se numește *șir periodic* de perioadă t;

$\mathbf{d_{44}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este **m**-*periodic* de perioadă $t \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\, n \in \mathbf{N},\ n \geqslant m$ astfel încît $a_{n+t} \neq a_n$ ($d_{41} \Leftrightarrow d_{43}$);

$\mathbf{c_4}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, **m**-*periodic* de perioadă $t = 1$ este un șir **m**-*constant* și reciproc, orice șir **m**-*constant* este un șir **m**-*periodic* de perioadă $t = 1$;

$\mathbf{d_{45}}$: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică o **m**-*recurență*, $m \in \mathbf{N}$ de ordinul $k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow (\exists) f : \mathbf{N} \times D^{k+1} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant m$. Un șir care verifică o **0**-*recurență* de ordinul $k \in \mathbf{N}^*$ se va numi *șir recurent* de ordinul $k \in \mathbf{N}^*$.
Aici, $D \subset \mathbf{R}$ este o mulțime care include mulțimea tuturor valorilor șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

$\mathbf{d_{46}}$: Mulțimea tuturor șirurilor $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică o **m**-*recurență* de ordinul $k \in \mathbf{N}^*$ se va numi *soluția generală* a recurenței respective;

$\mathbf{d_{47}}$: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică o **m**-*recurență* de ordinul $k \in \mathbf{N}^*$ și satisface *condițiile inițiale*:

$$x_m = a_0,\ x_{m+1} = a_1, \ldots, x_{m+k-1} = a_{k-1}$$

se numește *soluție particulară* a recurenței respective;

$\mathbf{d_{48}}$: Fiind date șirurile $(a_n^{(0)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$ ..., ..., $(a_n^{(k-1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vom spune că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică o **m**-*recurență liniară* ($m \in \mathbf{N}$) de ordinul $k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow L(x_n) = x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_n x_{n+i} = b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$. Recurența $L(x_n) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ o numim **m**-*recurență liniară* și *omogenă* asociată recurenței $L(x_n) = b_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$;

$\mathbf{t_2}$: **Dacă $(x_n^0)_{n\in\mathbf{N}}$ este o soluție a recurenței $L(x_n) = b_n$ și dacă $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este soluția generală a recurenței $L(x_n) = 0$ atunci $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_n = \bar{x}_n + x_n^0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ este soluția generală a recurenței $L(x_n) = b_n$;**

d_{49}: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește ***m-liniar recurent cu coeficienți constanți*** $(m \in \mathbf{N})$, de ordinul $k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\ a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$x_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x_{n+i} = b_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant m;$$

d_{50}: Un șir liniar recurent de ordinul unu se numește *progresie geometrică*. Dacă relația de recurență este $x_{n+1} = r\ x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, atunci r se numește *rația* progresiei;

d_{51}: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *progresie aritmetică* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists) r \in \mathbf{R}$ a. î. $x_{n+1} = x_n + r$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Numărul $r \in \mathbf{R}$ se numește *rația* progresiei;

p_{13}: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care este o progresie aritmetică, este un șir liniar recurent de ordinul doi cu relația de recurență $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

d_{52}: Mulțimea formată din toate numerele reale împreună cu $+\infty$ și $-\infty$ se numește *dreapta încheiată* și o vom nota $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$;

d_{53}: Intervalele $(a, +\infty]$ cu $a \in \mathbf{R}$ unde $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se numesc *vecinătățile* lui $+\infty$, iar intervalele $[-\infty, b)$ cu $b \in \mathbf{R}$ unde $[-\infty, b) = \{-\infty\} \cup (-\infty, b)$ se numesc *vecinătățile* lui $-\infty$;

c_5: Singurul punct de acumulare al mulțimii $\mathbf{N}$ este $+\infty$;

d_{54}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *are limită* $\Leftrightarrow (\exists)\ a \in \bar{\mathbf{R}}$ a. î. $(\forall)\ V_a$, $(\exists) n_V \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n > n_V \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \in V_a$. Vom desemna acest lucru prin $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\bar{\mathbf{R}}}$;

d_{55}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *are limită* $\Leftrightarrow (\exists)\ a \in \bar{\mathbf{R}}$ a. î. $(\forall)\ V_a$ în interiorul acestei vecinătăți se află toți termenii șirului cu excepția unui număr finit dintre termeni care pot fi în afara acestei vecinătăți $(d_{55} \Leftrightarrow d_{54})$;

d_{56}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \notin \mathcal{C}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\forall)\ a \in \bar{\mathbf{R}}$, $(\exists)\ V_a$, a. î. $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$, $(\exists) n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ cu proprietatea că $a_n \notin V_a$ $(d_{56} \Leftrightarrow d_{54})$;

$\mathbf{p_{14}}$: Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ atunci limita șirului este unică;

$\mathbf{d_{57}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *convergent* $\Leftrightarrow (\exists) a \in \mathbf{R}$ a. î. $(\forall) V_a$, $(\exists)\ n_V \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_V \Rightarrow a_n \in V_a$. Vom desemna acest fapt prin $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$;

$\mathbf{d_{58}}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\exists)\ a \in \mathbf{R}$ astfel încît $(\forall)\ V_a$ toți termenii șirului se află în V_a cu excepția unui număr finit dintre ei care se pot afla în afara lui V_a $(d_{58} \Leftrightarrow d_{57})$;

$\mathbf{d_{59}}$: Un șir care nu este convergent se numește *divergent*. Deci un șir este divergent dacă nu are limită sau dacă are ca limită pe $+\infty$ sau pe $-\infty$ $(d_{59} \Leftrightarrow d_{57} \Leftrightarrow d_{58})$;

$\mathbf{t_3}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\exists)\ a \in \mathbf{R}$ a. î. $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$;

$\mathbf{t_4}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \notin \mathcal{C}_{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\forall)\ a \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ astfel încît: $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$ $(t_3 \Leftrightarrow t_2)$;

$\mathbf{t_5}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este divergent la $+\infty \Leftrightarrow (\forall)\ M \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_M$ atunci $a_n > M$;

$\mathbf{t_6}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este divergent la $+\infty \Leftrightarrow (\exists)\ M \in \mathbf{R}_+$ astfel încît $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ astfel încît $a_n \leqslant M$ $(t_6 \Leftrightarrow t_5)$;

$\mathbf{t_7}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este divergent la $-\infty \Leftrightarrow (\forall)\ M \in \mathbf{R}_-$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_M$ atunci $a_n < M$;

$\mathbf{t_8}$: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este divergent la $-\infty \Leftrightarrow (\exists)\ M \in \mathbf{R}$ astfel încît $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ cu proprietatea că $a_n \geqslant M$ $(t_8 \Leftrightarrow t_7)$;

$\mathbf{p_{15}}$: (criteriu). Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt două șiruri de numere reale cu proprietățile: $|a_n - a| \leqslant |b_n|$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

$\mathbf{p_{16}}$: (criteriu). Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ sînt două șiruri de numere reale cu proprietățile: $a_n \geq b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

$\mathbf{p_{17}}$: (criteriu) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale cu proprietățile: $a_n \leq b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

$\mathbf{p_{18}}$: (criteriu). Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit, atunci șirul $(a_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$;

$\mathbf{p_{19}}$: Orice șir convergent este mărginit;

$\mathbf{p_{20}}$: Dacă un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent către $a \in \mathbf{R}$ atunci orice subșir al său $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ este convergent și $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$;

$\mathbf{t_9}$: (Lema lui CESARO[1]). Orice șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ conține un subșir care are limită. Orice șir mărginit conține un subșir convergent;

$\mathbf{t_{10}}$: Orice șir **m**-monoton (**m**-strict monoton) care este mărginit este convergent;

$\mathbf{t_{11}}$: Orice șir **m**-crescător (**m**-strict crescător) și nemărginit este divergent la $+\infty$;

$\mathbf{t_{12}}$: Orice șir **m**-descrescător (**m**-strict descrescător) și nemărginit este divergent la $-\infty$;

$\mathbf{t_{13}}$: Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt două șiruri care au limită și dacă există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $a_n \leq b_n$, oricare ar fi $n \geq m$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

$\mathbf{p_{21}}$: (criteriu). Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale cu proprietățile că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in \overline{\mathbf{R}}$ și există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît

---

[1] Cesaro, Ernesto (1859—1906), — matematician italian.

$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}, n \geqslant m$ atunci șirul $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$;

d_{60}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *șir fundamental* sau *șir* CAUCHY $\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$, $(\exists)\, k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\, n, m \in \mathbf{N}$, $n, m > k_\varepsilon \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.
Vom desemna acest fapt prin $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}_\mathbf{R}$;

d_{61}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \notin \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$ astfel încît $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$, $(\exists)\, n, m \in \mathbf{N}$, $n, m > k$ astfel încît $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu este șir fundamental ($d_{61} \Leftrightarrow \bar{d}_{60}$);

t_{14}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$, $(\exists)\, m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ a. î. $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m_\varepsilon$ și $(\forall)\, p \in \mathbf{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$;

t_{15}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \notin \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$ astfel încît $(\forall)\, m \in \mathbf{N}$, $(\exists)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ și $(\exists)\, p \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $|a_{n+p} - a_n| \geqslant \varepsilon$ ($t_{15} \Leftrightarrow \bar{t}_{11}$);

t_{16}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$, $(\exists)\, m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon$;

t_{17}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \notin \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, \varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$, astfel încît $(\forall)\, m \in \mathbf{N}$, $(\exists)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$ cu proprietatea că $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon$ ($t_{17} \Leftrightarrow \bar{t}_{16}$);

t_{18}: (Criteriul general de convergență al lui CAUCHY). Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}_\mathbf{R} \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_\mathbf{R}$ adică un șir este convergent dacă și numai dacă este fundamental;

d_{62}: Un număr $a \in \mathbf{R}$ se numește punct limită al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \Leftrightarrow$ orice vecinătate V_a a lui a conține o infinitate de termeni ai șirului.

p_{22}: Pentru orice șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) și un cel mai mare punct limită (finit sau infinit);

d_{63}: Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale. Cel mai mic punct limită al șirului se numește *limită inferioară* a șirului și se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} a_n$; cel mai mare punct

limită al șirului se numește *limita superioară* a șirului și se notează $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ sau $\lim\sup_{n\to\infty} a_n$;

t_{19}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are limită (finită sau infinită) dacă și numai dacă $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Dacă șirul are limită atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$;

t_{20}: Un șir are limită $\Leftrightarrow$ șirul are un singur punct limită;

d_{64}: Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ atunci $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ și $\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ și $(\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$, $\Delta^0 a_n = a_n$;

d_{65}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *convex (strict convex)* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Delta^2 a_n \geqslant 0$ $(\Delta^2 a_n > 0)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$;

d_{66}: Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *concav (strict concav)* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Delta^2 a_n \leqslant 0$ $(\Delta^2 a_n < 0)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$;

d_{67}: Sistemul de șiruri $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(a_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *liniar independent* $\Leftrightarrow \alpha_1 a_n^{(1)} + \alpha_2 a_n^{(2)} + \ldots + \alpha_p a_n^{(p)} = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$;

d_{68}: Sistemul de șiruri $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(a_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ se numește *liniar dependent* $\Leftrightarrow$ nu este liniar independent $(d_{67} \Leftrightarrow \bar{d}_{68})$;

p_{23}: Sistemul de șiruri $(a_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(a_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ este liniar dependent $\Leftrightarrow (\exists)\, \alpha_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ cu $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \neq 0$ astfel încît $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_n^{(i)} = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$;

t_{21}: (CESARO—STOLZ). Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

1). Șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict monoton și nemărginit $(b_0 \in \mathbf{R}^*)$;

2). Există $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = x \in \mathbf{R}$;

atunci există și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ și avem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x$;

d_{69}: Dacă $\mathcal{M}_{(k,\,m)}(\mathbf{R})$ este mulțimea matricilor de numere reale cu k linii și m coloane, vom numi *șir de matrici* de tipul (k, m) orice funcție $f: \mathbf{N} \to \mathcal{M}_{(k,\,m)}(\mathbf{R})$. Termenul general al șirului îl notăm $f(n) = A_n = \| a_{ij}^{(n)} \|_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ și vom desemna șirul prin $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

d_{70}: Spunem că șirul $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de matrici de tipul (k, m) are ca limită matricea $A \in \mathcal{M}_{(k,\,m)}(\bar{\mathbf{R}})$ și notăm $\lim_{n\to\infty} A_n = A = \| a_{ij} \|_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ dacă și numai dacă:
$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$, $(\forall)$ $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, k\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$;

d_{71}: Dacă $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{R}) = \{\vec{v} \mid \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},\ x, y \in \mathbf{R}\}$ este mulțimea vectorilor din planul raportat la un sistem cartezian ortogonal de coordonate xOy cu versorii $\vec{i}, \vec{j}$, vom numi *șir de vectori* din $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{R})$ orice funcție $f: \mathbf{N} \to \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{R})$. Termenul general al șirului îl notăm $f(n) = \vec{v}_n$ și vom desemna șirul prin $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

d_{72}: Spunem că șirul de vectori din $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{R})$, $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are ca limită vectorul $\vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}(\bar{\mathbf{R}})$ dacă și numai dacă:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ și } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

unde:

$$\vec{v}_n = x_n\vec{i} + y_n\vec{j} \text{ și } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j};$$

d_{73}: Pentru un șir liniar recurent cu coeficienți constanți care satisface definiția (d_{49}), ecuația: $P(x) = x^k - a_0 x^{k-1} - a_1 x^{k-2} - \ldots - a_{k-2} x - a_{k-1} = 0$ se numește *ecuația caracteristică* a recurenței omogene asociate;

P24: Dacă ecuația caracteristică $P(x) = 0$ are rădăcinile reale simple $x_1, x_2, ..., x_k$ atunci soluția generală a recurenței omogene asociate este de termen general:

$$x_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + ... + A_k x_k^n.$$

Pentru fiecare soluție particulară constantele reale A_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ se determină din condițiile inițiale respective;

P25: Dacă ecuația caracteristică $P(x) = 0$ are rădăcinile reale distincte $x_1, x_2, ..., x_p$ cu ordinele de multiplicitate $s_1, s_2, ..., s_p$, $\sum_{i=1}^{p} s_i = k$, atunci soluția generală a recurenței omogene asociate este de termen general $x_n = \sum_{i=1}^{p} Q_i(n)\, x_i^n$ unde $Q_i \in \mathbf{R}[X]$, gradul lui $Q_i \leqslant s_i - 1$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, ..., p\}$. Pentru fiecare soluție particulară (a recurenței omogene) în parte, polinoamele Q_i se determină din condițiile inițiale respective;

P26: Dacă ecuația caracteristică $P(x) = 0$ admite rădăcinile complexe simple $x_1, x_2, ..., x_p, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$, $2p \leqslant k$ și rădăcinile reale simple $x_{2p+1}, ..., x_k$ atunci soluția generală a recurenței omogene asociate este de termen general:

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} |x_i|^n (A_i \cos(n \arg x_i) + B_i \sin(n \arg x_i)) + \sum_{j=2p+1}^{k} A_j x_j^n.$$

Pentru fiecare soluție particulară (a recurenței omogene asociate) în parte, constantele reale A_i, B_i se determină din condițiile inițiale respective;

P27: Dacă ecuația caracteristică $P(x) = 0$ admite rădăcinile reale distincte $x_1, x_2, ..., x_p$ cu ordinele de multiplicitate $s_1, s_2, ..., s_p$ și mai admite și rădăcinile complexe distincte $x_{p+1}, ..., x_t$ cu ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, ..., r_t$ unde $\sum_{i=1}^{p} s_i + 2\sum_{j=1}^{t} r_j = k$ atunci termenul

general al soluției generale a recurenței liniare-omogene asociate este

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} Q_i(n) x_i^n + \sum_{j=1}^{t} (|x_{p+j}^n| \cdot (S_j(n) \cos(n \arg x_{p+j}) + T_j(n) \sin(n \arg x_{p+j})))$$

unde $Q_i, S_j, T_j \in \mathbf{R}[X]$, $(\forall) i \in \{1, 2, ..., p\}$, $j \in \{1, 2, ..., t\}$ și unde gradul lui $Q_i \leqslant s_i - 1$, gradul lui $S_j \leqslant r_j - 1$, gradul lui $T_j \leqslant r_j - 1$.

Pentru fiecare soluție particulară (a recurenței omogene) în parte, polinoamele Q_i, S_j, T_j se determină din condițiile inițiale respective.

d74: Se numește *șir dublu* de elemente ale unei mulțimi A orice funcție $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to A$. Pentru orice $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ vom nota $f(m, n) = a_{mn}$ și-l vom numi termenul general al șirului dublu f. Uneori pentru desemnarea șirului dublu f vom întrebuința notația $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ sau notația $\{a_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$.

Mulțimea valorilor șirului dublu f notată $f(\mathbf{N}^2)$ o putem scrie sub forma unei *matrici infinite* după cum urmează:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \ldots & a_{0n} \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{array} \right\|_{\mathbf{N}^2}$$

d75: Dacă un șir dublu de numere reale $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ are proprietatea că $a_{mn} = 0$ dacă $n > m$ atunci șirul dublu se numește *inferior triunghiular*. Dacă șirul dublu de numere reale $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ are proprietatea că $a_{mn} = 0$ dacă $n < m$, atunci șirul dublu se numește *superior triunghiular*. Neglijînd valorile nule ale șirului triunghiular inferior pentru $n > m$ și ale celui triun-

ghiular superior pentru $n < m$, matricile valorilor unor astfel de șiruri sînt respectiv:

$$\begin{Vmatrix} a_{00} & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & \dots \\ & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ & & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ & & & \dots & \dots & \\ & & & & a_{nn} & \dots \\ & & & & & \dots \end{Vmatrix}.$$

d$_{76}$: Dacă un șir dublu de numere reale are proprietatea că $a_{mn} = 0$ dacă $m \neq n$, atunci el se numește *șir diagonal*;

d$_{77}$: Dacă un șir dublu de numere reale are proprietatea că pentru un $m \in \mathbf{N}$ fixat $a_{kn} = 0$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$, $k \neq m$ atunci șirul se numește un *șir* m*-linie*;

d$_{78}$: Dacă un șir dublu de numere reale are proprietatea că pentru un $n \in \mathbf{N}$ fixat $a_{mk} = 0$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$, $k \neq n$ atunci șirul se numește un *șir* n*-coloană*.

d$_{79}$: Un șir dublu $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ se numește (k, p) — *orizontal dreptunghiular* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $k, p \in \mathbf{N}$, $k \leqslant p$, a. î. $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$ și $(\forall)$ $m \in \mathbf{N}$, $m < k$ sau $m > p$ atunci $a_{mn} = 0$.

d$_{80}$: Un șir dublu $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ se numește (k, p) — *vertical dreptunghiular* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $k, p \in \mathbf{N}$, $k \leqslant p$ a.î $(\forall)$ $m \in \mathbf{N}$ și $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$, $n < k$ sau $n > p$ atunci $a_{mn} = 0$.

p$_{28}$: (Lema lui KRONECKER). Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir de numere reale cu $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$ care este strict monoton și nemărginit iar $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir de numere reale astfel încît există $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k} \in \mathbf{R}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ și este egală cu zero.

CAPITOLUL 1

PROBLEME REZOLVATE

1.1. *Să se verifice că:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n + (-3)^n}{4^n} = 0$$

folosind definiția cu ε *a limitei unui șir.*

Soluție. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar. Avem:

$$\left|\frac{2\cdot 3^n + (-3)^n}{4^n}\right| \leqslant \frac{3\cdot 3^n}{4^n} < \varepsilon$$

deci:

$$n \ln \frac{3}{4} < \ln \frac{\varepsilon}{3}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$n > \ln \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{\ln \frac{3}{4}}.$$

Rezultă că dacă luăm:

$$n_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \varepsilon > 3 \\ \left[\dfrac{\ln \frac{\varepsilon}{3}}{\ln \frac{3}{4}}\right]_* & \text{pentru } \varepsilon \leqslant 3 \end{cases}$$

atunci $(\forall) n > n_\varepsilon$ avem:

$$\left|\frac{2\cdot 3^n + (-3)^n}{4^n}\right| < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n > n_\varepsilon$ are loc:

$$\left| \frac{2 \cdot 3^n + (-3)^n}{4^n} \right| < \varepsilon$$

deci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 3^n + (-3)^n}{4^n} = 0.$$

1.2. *Să se arate folosind definiția limitei unui șir, că* $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 2$ *unde*:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1},\ (\forall) n \geqslant 2.$$

Soluție. Va trebui să arătăm că $(\exists)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ să avem:

$$|a_n - 2| \geqslant \varepsilon.$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{3}$, atunci:

$$|a_n - 2| = \left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 2 \right| = \left| \frac{n^2 + 1 - 2n^2 + 2}{n^2 - 1} \right| = \left| \frac{3 - n^2}{n^2 - 1} \right| =$$

$$= \frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} \geqslant \frac{1}{3},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

ceea ce arată că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \neq 2.$$

1.3. *Să se arate, folosind definiția limitei unui șir că*:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{n + 1} = +\infty.$$

Soluție. Va trebui să arătăm că $(\forall)\ M \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_M$ are loc $a_n > M$, unde:

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{n + 1}.$$

Avem:

$$\frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^2-1+3}{n+1} = n-1+\frac{3}{n+1} > n-1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Fie $M \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar; atunci conform axiomei lui ARHIMEDE[1], $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$n_M > M + 1$$

care este echivalent cu:

$$n_M - 1 > M.$$

Este evident că pentru $(\forall)\ n > n_M$ avem $n - 1 > M$ şi deci, cum $M \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar, rezultă că $(\forall)\ M \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_M$ are loc:

$$a_n > n - 1 > M$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

1.4. *Să se arate, folosind definiţia limitei unui şir, că:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{5n-1} = \frac{4}{5}.$$

Soluţie. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar; inegalitatea:

$$\left|\frac{4n+1}{5n-1} - \frac{4}{5}\right| < \varepsilon$$

este echivalentă cu inegalitatea:

$$\frac{9}{5\varepsilon} < 5n - 1,$$

prin urmare cu:

$$n > \frac{9+5\varepsilon}{25\varepsilon}.$$

Deci, luînd $n_\varepsilon = \left[\frac{9+5\varepsilon}{25\varepsilon}\right]_*$, rezultă că $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ avem:

$$\left|\frac{4n+1}{5n-1} - \frac{4}{5}\right| < \varepsilon.$$

[1] Arhimede (c. 278–212 î.e.n) – celebru matematician grec al antichităţii.

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar, rezultă că $(\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$:

$$\left| \frac{4n+1}{5n-1} - \frac{4}{5} \right| < \varepsilon,$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{5n-1} = \frac{4}{5}.$$

1.5. *Să se arate, plecînd de la definiție, că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *unde:*

$$x_n = \frac{1}{n^3},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

este convergent la zero.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat dar arbitrar. Să determinăm $n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ așa încît:

$$|x_n - 0| < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon.$$

Evident însă:

$$|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Deci, putem lua $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]_*$.

Spre exemplu, pentru $\varepsilon = \frac{1}{101}$ avem $n_\varepsilon = [\sqrt{101}]_* = 10$; pentru $\varepsilon = \frac{1}{1001}$ avem $n_\varepsilon = [\sqrt{1001}]_* = 31$.

1.6. *Dacă un șir* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent, atunci șirul* $(\Delta a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent la zero. Dacă șirul* $(\Delta a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge la* $A \neq 0$ *atunci șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *nu este convergent.*

Soluție. Conform definiției, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent dacă și numai dacă $(\exists)\ a \in \mathbf{R}$ astfel încît, $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ are loc:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Avem:

$$|\Delta a_n| = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq$$
$$\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a|, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar, atunci:

$$|\Delta a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ (\forall) n \geq n_\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|\Delta a_n| < \varepsilon, \ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon$$

deci, echivalent cu:

$$\lim_{n \to \infty} \Delta a_n = 0.$$

Dacă $\lim_{n \to \infty} \Delta a_n = A \neq 0$ atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nu poate fi convergent deoarece din cele demonstrate mai sus ar rezulta $A = 0$ ceea ce este contradictoriu.

1.7. *Să se arate că dacă* $|a| < 1$ *atunci:*

$$\lim_{n \to \infty} na^n = 0.$$

Soluție. Cazul $a = 0$ este banal. Presupunem $a \neq 0$. Deoarece $|a| < 1$, rezultă că $(\exists)\ b \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît

$$|a| = \frac{1}{1+b} \text{ și deci:}$$

$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1+b)^n} = \frac{1}{1 + C_n^1 b + C_n^2 b^2 + \ldots + b^n} <$$

$$< \frac{1}{C_n^2 b^2} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Rezultă deci că:

$$n|a|^n < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{1}{n-1}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar; atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\frac{2}{b^2(n-1)} < \varepsilon, \ (\forall) n > n_\varepsilon.$$

Deci $(\exists)\ n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right]_*$ astfel încît:

$$n\,|\,a\,|^n < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a^n = 0$ dacă $|\,a\,| < 1$.

1.8. *Fie șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *astfel încît:*

$$a_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 + k^3 + 1}{k^4 + k}.$$

a°). *Să se arate că acest șir este convergent.*

b°). *Să se găsească rangul* n *de la care avem:*

$$|\,a_n - a\,| \leqslant 0,\,01.$$

Soluție. a°). Avem:

$$\frac{k^4 + k^3 + 1}{k^4 + k} = \frac{k^4 + k + k^3 - k + 1}{k(k+1)(k^2 - k + 1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

și prin urmare:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k} = n + 1 - \frac{1}{n+1}$$

de unde obținem:

$$a_n = 1 + a + n - n - 1 + \frac{1}{n+1} = a + \frac{1}{n+1}$$

ceea ce ne arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, deci șirul este convergent.

b°). Deoarece $a_n - a = \frac{1}{n+1}$ atunci are loc șirul de echivalențe:

$$|\,a_n - a\,| \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{100} \Leftrightarrow 100 \leqslant n + 1 \Leftrightarrow 99 \leqslant n.$$

Deci, termenul cerut în enunț este:

$$a_{99} = a + \frac{1}{100}.$$

1.9. *Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1,$$

unde $x \in \mathbf{R}_+^*$, $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Soluție. Dacă $x > 1$ atunci este evident că:

$$\sqrt[n]{x} > 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}:$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $x < 1 + n\varepsilon$, dacă $n > \left[\frac{x-1}{\varepsilon}\right]_*$, și dacă ținem seama de inegalitatea:

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

rezultă că:

$$x < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow 1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{x} > 1 + \varepsilon$$

pentru orice $n > n_\varepsilon = \left[\frac{x-1}{\varepsilon}\right]_*$. Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Dacă $x = 1$ atunci $\sqrt[n]{x} = 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Dacă $x < 1$ atunci $\frac{1}{x} = y > 1$ și deci, ținînd seama că $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y}} = 1.$$

1.10. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Soluția I. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

unde $u_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad \text{(v. [1], [16], [31]).}$$

Soluția a II-a. Vom demonstra că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ are loc:

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, $(\forall)n \in N^* - \{1\}$ atunci $\sqrt[n]{n} > 1$. Fie deci $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$, $(\forall)n \geqslant 2$, atunci $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ implică:

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2 + \ldots + a_n^n$$

de unde obținem:

$$n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

sau:

$$0 < a_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

și prin urmare:

$$0 < |\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad (\forall)n \geqslant 2.$$

Rezultă că $(\forall)\varepsilon > 0$, are loc $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ care are proprietatea că:

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

Deci, luînd $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right]_*$ rezultă că:

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

și deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Soluția a III-a. Vom demonstra că $(\forall)\ b \in \mathbf{R}_+^*$, dacă notăm $a = 1 + b$, are loc:

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Într-adevăr:

$$a^n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k > C_n^2 b^2 = \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

Deoarece $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ avem $\frac{n}{4} \leqslant \frac{n-1}{2}$ atunci

$$\frac{n^2}{4} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}, \text{ deci:}$$

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geqslant \frac{n^2}{4}(a-1)^2.$$

Dacă în inegalitatea precedentă facem $a = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ obținem:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n > \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2}{4} n^2$$

deci:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n > n$$

adică:

$$1+\frac{2}{\sqrt{n}} > \sqrt[n]{n}.$$

Prin urmare, avem:

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}};\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem:

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leqslant 1$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

1.11. *Să se arate că dacă* $a > 1$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Soluție. După cum știm (v. 1.7), dacă $b > 1$ atunci avem, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$ și deci $(\exists)\ m \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\frac{1}{b^m} < \frac{n}{b^n} < 1,\ (\forall)\ n > m.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar; atunci este evident că $a^2 > 1$ și deci $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ să avem echivalențele:

$$\frac{1}{a^{n\varepsilon}} < \frac{n}{a^{n\varepsilon}} < 1 \Leftrightarrow 1 < n < a^{n\varepsilon} \Leftrightarrow 0 < \log_a n < n\varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ are loc:

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

1.12. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir de numere reale. Să se arate că:*

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\ \nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ *astfel încît:*

$$|x_n - x| < \frac{1}{m};\ (\forall)\ n \geqslant \nu(m).$$

Soluție. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon.$$

Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$. Atunci pentru $(\forall) m \in \mathbf{N}^*$, avem $\frac{1}{m} = \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ și deci există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon = \frac{1}{m},\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Deci, pentru $(\forall)m \in \mathbf{N}^*$, luînd $\nu(m) = n_{\frac{1}{m}}$ rezultă că există $\nu: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea din enunț. Evident această funcție nu este unică.

Presupunem că $(\exists)\ \nu: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \frac{1}{m},\ (\forall)\ n \geqslant \nu(m).$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar luat, atunci $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_* \in \mathbf{N}$, și deci, notînd:

$$m = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_* \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < m + 1,$$

rezultă că $\varepsilon > \frac{1}{m+1}$ și deoarece $m + 1 \in \mathbf{N}^*$ există $\nu(m+1)$ și atunci:

$$|x_n - x| < \frac{1}{m+1} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant \nu(m+1).$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost ales arbitrar, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon = \nu\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_* + 1\right) \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

1.13. *Fie $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale. Să se demonstreze echivalența: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow (\exists)\ \nu: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ astfel încît $x_n > m,\ (\forall)\ n \geqslant \nu(m)$.*

Soluție. Evident, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall)\ M \in \mathbf{R},\ (\exists) n_M \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n > M,\ (\forall)\ n \geqslant n_M.$$

Presupunem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$. Atunci pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ n_m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n > m,\ (\forall)\ n \geqslant n_m.$$

Deci, pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$, luînd $\nu(m) = n_m$ rezultă că există $\nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea din enunț. Evident că această funcție nu este unică.

Reciproc, presupunem că $(\exists)\ \nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, astfel încît $x_n > m$, $(\forall) n \geqslant \nu(m)$. Fie $M \in \mathbf{R}$ arbitrar luat. Dacă $M \leqslant 1$ atunci este evident că $x_n > 1$, $(\forall) n \geqslant \nu(1)$ iar dacă $M > 1$ atunci notînd $m = [M]_*$ este evident că:

$$x_n > m + 1 > M, \quad (\forall) n \geqslant \nu(m+1).$$

Prin urmare, $(\forall) M \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}^*$ cu:

$$n_M = \begin{cases} \nu(1) & \text{dacă } M \leqslant 1 \\ \nu([M]_* + 1) & \text{dacă } M > 1 \end{cases}$$

astfel încît are loc echivalența:

$$x_n > M, (\forall)\ n > n_M \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty.$$

1.14. *Fie $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale. Să se demonstreze că: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow (\exists)\ \nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ astfel încît:*

$$x_n < -m, \quad (\forall)\ n \geqslant \nu(m).$$

Soluție. Evident, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall) M \in \mathbf{R}$, $(\exists) n_M \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n < M, \quad (\forall)\ n \geqslant n_M.$$

Presupunem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$. Atunci pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ n_m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n < -m, \quad (\forall)\ n \geqslant n_m$$

deci pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$ luînd $\nu(m) = n_m$ rezultă că există $\nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea din enunț. Este evident că această funcție nu este unică.

Reciproc, presupunem că $(\exists)\ \nu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ astfel încît $x_n < -m$, $(\forall)\ n \geqslant \nu(m)$. Fie $M \in \mathbf{R}$ arbitrar luat. Dacă $M \geqslant -1$, este evident că:

$$x_n < -1 \leqslant M, \quad (\forall) n \geqslant \nu(1)$$

Iar dacă $M < -1$ atunci, notînd $-m = [M]_* \in \mathbf{Z}^-_*$, este **evident că:**

$$x_n < -m \leqslant M, \ (\forall)\ n \geqslant \nu(m).$$

Prin urmare, $(\forall)\ M \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ n_M \in \mathbf{N}^*$ **cu:**

$$n_M = \begin{cases} \nu(1) & \text{dacă } M \geqslant -1 \\ \nu(-[M]_*) & \text{dacă } M < -1 \end{cases}$$

astfel încît are loc:

$$x_n < M, \ (\forall)\ n \geqslant n_M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

1.15. *Dacă* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un șir de numere reale astfel încît:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\, a_n\right) = 0$$

să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Olimpiada matematică, U.R.S.S. 1977).

Soluție. Evident:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\, a_n\right) = 0$$

dacă și numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ **astfel încît** $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$ **are loc:**

$$-\varepsilon < a_{n+1} - \frac{1}{2}\, a_n < \varepsilon$$

deci, echivalent cu:

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon :$$

$$\frac{1}{2}\, a_n - \varepsilon < a_{n+1} < \frac{1}{2}\, a_n + \varepsilon. \tag{1}$$

Vom demonstra că $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$ **și** $(\forall)\ i \in \mathbf{N}^*$ **are loc:**

$$\frac{1}{2^i}\, a_n - 2\varepsilon < a_{n+i} < \frac{1}{2^i}\, a_n + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă ținem seama de (1), avem:

$$\frac{1}{2^{i+1}}a_n - 2\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n - 2\varepsilon\right) - \varepsilon < \frac{1}{2}a_{n+i} - \varepsilon < a_{n+i+1} <$$

$$< \frac{1}{2}\cdot a_{n+i} + \varepsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n + 2\varepsilon\right) + \varepsilon = \frac{1}{2^{i+1}}a_n + 2\varepsilon$$

și atunci, prin inducție după i, rezultă (2), deoarece pentru $i = 1$, relația (2) este evidentă.

Deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\, i \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\left|\frac{a_n}{2^i}\right| < \varepsilon$, dacă ținem seama de (2), rezultă că $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon$ avem echivalența:

$$-3\varepsilon < a_n < 3\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

1.16. *Să se demonstreze că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

este convergent.

Soluție. Avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{1}{n}.$$

Deci, $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_*$ astfel încît $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon$ și $(\forall)\, p \in \mathbf{N}$ atunci:

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Fiind satisfăcut criteriul lui CAUCHY, șirul este convergent.

1.17. *Să se demonstreze că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$x_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$$

este convergent.

Soluție. Avem:

$$|x_{n+p}-x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \leqslant \frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{p-1}}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n}=0$, rezultă că $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$\left|\frac{1}{2\cdot 3^n}\right| < \varepsilon,\quad (\forall)\ n > n_\varepsilon .$$

Deci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ atunci:

$$|x_{n+p}-x_n| < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon$$

și prin urmare, conform criteriului lui *Cauchy*, șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

1.18. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir* CAUCHY *de numere reale. Să se arate că dacă din șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *se poate extrage un subșir convergent către un număr real, atunci șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent către același număr real.*

Soluție. Fie $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ subșirul lui $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care converge către $x \in \mathbf{R}$. Rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n_k > n_\varepsilon$ are loc:

$$|x_{n_k}-x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir fundamental rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n'_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ m, n > n'_\varepsilon$ are loc:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon/2.$$

Fie $n'_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n''_\varepsilon)$; atunci, pentru $(\forall)\, n,\ n_k > n'_\varepsilon$ avem:

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge către x.

1.19. *Fiind dat șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $x_n > 0$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right)$.

Soluție. Fie:

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right).$$

Atunci:

$$\frac{a_n}{n} + 1 = \sqrt[n]{x_n}$$

deci:

$$x_n = \left(\frac{a_n}{n} + 1\right)^n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}\right)^{\frac{n\cdot a_n}{n}}$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

și prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln \lim_{n\to\infty} x_n = \ln x.$$

1.20. *Să se determine limitele extreme ale șirului* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$x_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{4},\quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Avem:

$$x_{4n} < x_{4n-3} < x_{4n-1} < x_{4n-2},\quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{4n-1} = 1.$$

1.21. *Să se determine limitele extreme ale șirului* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu termenul general:*

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Soluție. Evident:

$$x_{4n-3} = 6,\ x_{4n-2} = -4,\ x_{4n-1} = 0,\ x_{4n} = 2,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și prin urmare:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -4,\ \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 6.$$

1.22. *Să se construiască un exemplu de șir de numere reale pentru care toți termenii unui șir dat* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *să fie limite parțiale. Ce alte limite parțiale trebuie să mai aibă neapărat șirul construit ca exemplu?*

Soluție. Cu ajutorul șirului dat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ construim șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ care are ca termeni, toți termenii șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dar în plus conține și termenii:

$$x_{n,k} = a_k + \frac{1}{n+k},\ (\forall)\ n,\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Deci, șirul cerut este:

$$a_1,\ a_1 + \frac{1}{2},\ a_2,\ a_1 + \frac{1}{3},\ a_2 + \frac{1}{3},\ a_3,\ a_1 + \frac{1}{4},\ a_2 + \frac{1}{4},$$

$$a_3 + \frac{1}{4},\ a_4 \ldots$$

Acesta are drept limite parțiale toți termenii șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Șirul construit ca exemplu trebuie să mai aibă neapărat ca limite parțiale, limitele tuturor subșirurilor sale, între care și toate limitele parțiale ale șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

1.23. *Să se construiască un exemplu de șir de numere reale care are drept limite parțiale numerele date,* $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Soluție. Fie:

$$x_{n,k} = a_k + \frac{1}{n},\ (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n\cdot k} = \lim_{n\to\infty}\left(a_k + \frac{1}{n}\right) = a_k,\ (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Deci, șirul cerut în enunț poate fi șirul:

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1, \ldots, a_p + 1, a_1 + \frac{1}{2},\ a_2 + \frac{1}{2}, \ldots,$$

$$a_p + \frac{1}{2}, \ldots,\ a_1 + \frac{1}{n},\ a_2 + \frac{1}{n}, \ldots,\ a_p + \frac{1}{n}, \ldots$$

1.24. *Fie* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir de numere cu proprietatea că subșirurile sale* $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ *și* $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ *au limită. În aceste condiții șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *are limită?*

Soluție. Fie:

$$a = \lim_{n\to\infty} u_{2n},\ b = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1},\ c = \lim_{n\to\infty} u_{3n}.$$

Deoarece $(u_{6n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un subșir al șirurilor $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} u_{6n} = a$ și $\lim_{n\to\infty} u_{6n} = c$ și deci, în baza unicității limitei unui șir, rezultă că $a = c$.

Ținînd seama că șirul $(u_{3(2n+1)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un subșir al șirurilor $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} u_{3(2n+1)} = b$, $\lim_{n\to\infty} u_{3(2n+1)} = c$ și, în baza unicității limitei, rezultă $b = c$.

Din $a = c$ și $b = c$ rezultă $a = b$ și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = a$$

adică șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ are limită.

1.25. *Dacă șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de numere reale are limită, rezultă că șirul* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu* $y_n = x_n^k$, $k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, *are limită?*

Soluție. Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent atunci șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ca produs de k șiruri convergente este convergent.

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ iar dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = (-1)^k \infty$. Deci, răspunsul este afirmativ.

1.26. *Se consideră şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n > 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $(v_n)_{n\geq 1}$. *astfel încît:*

$$v_n = ln\ (u_n - 1),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). *Să se afle expresia lui* u_n *astfel ca* $u_1 = 2$ *şi* $(v_n)_{n\geq 1}$ *să fie o progresie aritmetică de raţie* $r \in \mathbf{R}$.

b°). *Cum trebuie aleasă raţia* r *astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in \mathbf{R}$?

(Bacalaureat, Paris, 1971).

Soluţie. a°). Avem:

$$v_2 = v_1 + r = \ln (u_2 - 1) = \ln (u_1 - 1) + r = r$$

deci $u_2 - 1 = e^r$ adică $u_2 = e^r + 1$ sau $v_2 = r$.

Dar $v_1 = \ln (u_1 - 1) = \ln (2 - 1) = 0$ şi deci avem că $v_n = (n - 1)r$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ de unde obţinem că:

$$u_n = e^{v_n} + 1 = e^{(n-1)r} + 1,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + e^{(n-1)r}) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} e^{(n-1)r} =$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ dacă } r > 0 \\ 2 \text{ dacă } r = 0 \\ 1 \text{ dacă } r < 0 \end{cases}$$

deci $r \leqslant 0$ implică $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in \mathbf{R}$.

1.27. *Să se discute convergenţa şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *unde*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a}$$

după valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Dacă $a = 1$, atunci pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$ există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $n > 2^m$ şi deci:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1} + 1} + \frac{1}{2^{m-1} + 2} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^m}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Deoarece $m \in \mathbf{N}^*$ a fost ales arbitrar, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right) = +\infty$$

deci, echivalent cu, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă $a < 1$ atunci:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} > n \cdot \frac{1}{n^a} = n^{1-a}$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă $a > 1$ atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $n < 2^m$ și deci:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} < 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{ma}} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^a}\right) <$$

$$< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^a} + 4 \cdot \frac{1}{4^a} + \ldots + 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^a} = 1 + \frac{1}{2^{a-1}} +$$

$$+ \frac{1}{(2^{a-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{a-1})^m} = \frac{1 - \frac{1}{(2^{a-1})^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} =$$

$$= M < +\infty.$$

Deoarece șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ în cazul $a > 1$ este strict crescător și mărginit superior de $M = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} > 0$, rezultă că este convergent.

1.28. *Să se arate că șirul* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de termen general:*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^{k+1}}$$

este convergent.

Soluție. Este evident că șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător $\left(\Delta u_n = \frac{n+1}{(n+2)^{n+2}} > 0\right)$ și deci, pentru a demonstra că este convergent, va trebui să arătăm că este mărginit superior.

Într-adevăr:

$$u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} =$$

$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

1.29. *Fie șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \ n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). *Să se arate că* $u_n \in (-2, -1]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$;

b°). *Să se arate că șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent*;

c°). *Fie* $k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *și* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+k}} - a\sqrt{n}.$$

Să se determine $a \in \mathbf{R}$ *astfel încît șirul* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *să fie convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Soluție. a). Șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este descrescător. Într-adevăr:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} =$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{n(n+1)} - 2n - 2}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - 2n - 1}{\sqrt{n+1}} < 0,$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

echivalent cu:

$$u_{n+1} < u_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă că:

$$u_n < u_1 = -1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Din:

$$\sqrt{i+1}-\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}<\frac{1}{2\sqrt{i}},\quad (\forall)\ i\in\mathbf{N}^*$$

prin însumare, obținem:

$$\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

echivalent cu:

$$-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=u_n,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Cu aceasta am arătat că șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface condiția $u_n\in[-2,-1]$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$.

b°). Șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, fiind monoton și mărginit, este convergent.

c°). Din faptul că:

$$u_{n+k}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+k}}-2\sqrt{n+k},$$

obținem:

$$u_{n+k}=u_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+k}}+2\sqrt{n}-2\sqrt{n+k},$$

echivalent cu:

$$u_{n+k}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+k}}-2\sqrt{n+k}+2\sqrt{n},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$$

ceea ce echivalent cu:

$$u_{n+k}-u_n=v_n-2\sqrt{n+k}-2\sqrt{n}+a\sqrt{n},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$$

şi prin urmare, echivalent cu:

$$v_n + a\sqrt{n} = u_{n+k} - u_n + 2\left(\sqrt{n+k} - \sqrt{n}\right) =$$

$$= u_{n+k} - u_n + \frac{2k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

De aici, observînd că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+k} - u_n + \frac{2k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}}\right) = 0$$

rezultă că $(\exists) \lim_{n\to\infty} v_n$ dacă şi numai dacă $a = 0$ ceea ce este echivalent cu: $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

1.30. *Ştiind că* $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ *să se demonstreze că:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Să se deducă de aici că:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

unde $\theta_n \in (0, 1)$ *şi să se calculeze numărul* e *cu exactitate de* 10^{-5}.

Soluţie. Avem:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} > 1 + 1 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1 +$$

$$+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

De aici, prin trecere la limită după n, obținem:

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} = x_k, \ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Pe de altă parte, avem:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = x_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci:

$$e_n < x_n < e, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

de unde, dacă ținem seama că $\lim_{n\to\infty} e_n = e$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.

Avem:

$$x_{m+n} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}.$$

Pentru n fixat și $m \to +\infty$, obținem:

$$0 < e - x_n < \frac{1}{n!n}$$

și prin urmare, notînd:

$$0 < \theta_n = \frac{e - x_n}{\frac{1}{n!n}} < 1$$

obținem că:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}.$$

Inegalitatea:

$$0 < e - x_n < \frac{1}{n!n} < 10^{-5}$$

este adevărată pentru orice $n \geqslant 8$ și deci:

$$e \cong 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \cong 2{,}71828.$$

1.31. *Să se demonstreze că* $e \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Soluție. Presupunem că $e \in \mathbf{Q}$. Deci $e = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Așadar:

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \text{ cu } \theta_n \in (0, 1).$$

Înmulțind această egalitate cu $n!$ obținem:

$$(n-1)!\, m - n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n},$$

iar această ultimă egalitate este imposibilă deoarece $\frac{\theta_n}{n} \in (0, 1)$, iar membrul stîng este un întreg. Deci presupunerea $e \in \mathbf{Q}$ este absurdă și deci $e \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

1.32. *Orice șir* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *de numere întregi posedă un subșir care are limită.*

Soluție. 1°). $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este mărginit. Atunci există $M > 0$ pe care putem să-l presupunem natural, astfel încît:

$$|a_n| \leqslant M, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Cum în intervalul $[-M, M]$ se află $2M + 1$ numere întregi, rezultă că o infinitate de termeni ai șirului $(a_n)_{n \geqslant 1}$ sînt egali între ei, deci evident șirul posedă un subșir constant și deci convergent.

2°). $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ nu este mărginit. Atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ posedă o infinitate de termeni pozitivi sau negativi. În

primul caz, spre exemplu, pentru $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ n_k \in \mathbf{N}^*$, astfel că $a_{n_k} \geq k$ deci $a_{n_k} \to +\infty$, și putem alege șirul (n_k) strict crescător.

1.33*. *Spunem că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este cu* variație mărginită *dacă există* $M \in \mathbf{R}_+^*$ *astfel încît:*

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < M,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

a°). *Să se demonstreze că orice șir cu variație mărginită este convergent.*

b°). *Să se construiască un șir convergent care să nu fie cu variație mărginită.*

Soluție. a°). Deoarece șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ are variația mărginită, rezultă că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu:

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}|,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

este monoton și mărginit, adică este convergent. Știm că un șir convergent este șir fundamental și reciproc.

Deci, $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon$ și $(\forall)\ p \in \mathbf{N}$ avem:

$$|y_{n+p} - y_n| < \varepsilon.$$

Dar:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} - x_{n+p-1}| < |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| = |y_{n+p} - y_n|.$$

Deci, $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon$ și $(\forall)\ p \in \mathbf{N}$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu faptul că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este fundamental și, prin urmare, șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

b°). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $x_n = \frac{1-(-1)^n}{2n}$ este convergent la zero și totuși el nu este cu variație mărginită.

Într-adevăr:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n-1}| =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > \ln(1+1) +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}\right) > \ln \sqrt{2n+1}.$$

Fie $M \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar, atunci:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n-1}| >$$

$$> \ln \sqrt{2n+1} > M, \ (\forall)\ n > \frac{1}{2}(e^{2M} - 1).$$

Cum $M \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar, rezultă că oricare ar fi $M \in \mathbf{R}_+^*$ are loc:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n-1}| > M,$$

oricare ar fi $n > \frac{1}{2}(e^{2M} - 1)$. Deci șirul acesta nu este cu variație mărginită.

1.34. *Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se demonstreze că șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *cu* $a_n = \frac{n}{(n!)^2}$ *este convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Soluție. Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = e_n \cdot \frac{1}{n+1}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

Deoarece șirul cu termenul general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este strict crescător și $\lim\limits_{n \to \infty} e_n = e$ rezultă că:

$$e_n < e, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare din (1) obținem că:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și atunci, șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător. Fiind și mărginit inferior, $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, rezultă că este convergent. Deci $(\exists)\ a \in \mathbf{R}$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Din relația (1) obținem:

$$a_{n+1} = a_n \cdot e_n \cdot \frac{1}{n+1} =$$

de unde, prin trecere la limită rezultă: $a = a \cdot e \cdot 0 = 0$.

1.35. *Dacă* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este un șir de mulțimi cu proprietatea că* $n \leqslant m$ *implică* $A_n \subset A_m$ *atunci* $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n = A_0$.

Soluție. Fie $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Deci $x \in A_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ deci $x \in A_0$, adică $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n \subset A_0$.

Fie $y \in A_0$. Atunci $y \in A_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ aceasta deoarece $0 \leqslant n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și deci $A_0 \subset A_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Prin urmare, $A_0 \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

Și cu aceasta am demonstrat că $A_0 = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

1.36. *Dacă* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este un șir de mulțimi cu proprietatea că* $n \leqslant m$ *implică* $A_n \supset A_m$, *atunci* $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n = A_0$.

Soluție. Fie $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Atunci $(\exists)\ n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $x \in A_{n_0}$ ceea ce implică $x \in A_n$, $(\forall)\ n \leqslant n_0$ și, prin urmare, $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n \subset A_0$.

Reciproc, fie $y \in A_0$, atunci $y \in \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$ adică $A_0 \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$; cu aceasta am demonstrat că $A_0 = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

1.37. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ *și, pentru orice* $n \geqslant 3$:

$$a_n = n^2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Să se demonstreze că:

$$2a_n \geqslant (n-1)! \cdot (n+1)!, \quad (\forall)\ n \geqslant 3.$$

Soluție. Vom demonstra prin inducție completă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

Într-adevăr, $a_1 < a_2$ și deci, presupunînd că $a_{n-1} < a_n$, va trebui să demonstrăm că $a_n < a_{n+1}$.

Într-adevăr:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_n - a_{n-1} = (n^2 + 2n)\, a_n + a_n - a_{n-1} > (n^2 + 2n)\, a_n > a_n \Leftrightarrow a_n < a_{n+1}.$$

Deci, șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

Deoarece șirul dat este strict crescător, din relația de recurență obținem:

$$a_k > k^2 \cdot a_{k-1} - a_{k-1} = (k-1)(k+1)\, a_{k-1}, \ (\forall)\ k \geqslant 3. \quad (1)$$

Scriind relația (1) pentru $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$ și adunînd membru cu membru inegalitățile obținute, rezultă:

$$a_n > (n+1)(n-1)\, n(n-2)(n-1)(n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot a_2 \Leftrightarrow 2a_n > (n-1)!\,(n+1)!$$

adică inegalitatea din enunț.

1.38. *Fie* $k \in \mathbf{N}$ *și șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *astfel încît:*

$$a_n = n^2 + k.$$

Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *există* $n(m) \in \mathbf{N}^*$ *astfel încît* $a_{n(m)}$ *este produsul a* m *termeni distincți ai șirului* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Soluție. Vom demonstra enunțul prin inducție matematică după $m \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Pentru $m = 2$ proprietatea este adevărată, deoarece:

$$a_n a_{n+1} = (n^2 + k)\left((n+1)^2 + k\right) = n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 k + n^2 k + k^2 = (n(n+1) + k)^2 + k = a_{n \cdot (n+1) + k}$$

și, prin urmare, $n(2) = n \cdot (n+1) + k$.

Să presupunem că pentru $m = p$ proprietatea este adevărată adică există $n(p)$ astfel încît:

$$a_{n(p)} = a_{n_1} \cdot a_{n_2} \ldots a_{n_p}. \quad (1)$$

Să demonstrăm că și pentru $m = p + 1$ proprietatea este adevărată, adică există $n(p+1)$ astfel încît $a_{n(p+1)}$ se scrie ca un produs de $p + 1$ termeni distincți ai șirului dat.

Într-adevăr, avem:

$$a_{n(p)} \cdot a_{n(p)+1} = a_{n(p)\cdot(n(p)+1)+k}$$

și, dacă ținem seama de (1), obținem:

$$a_{n(p)\cdot(n(p)+1)+k} = a_{n(p)+1} \cdot a_{n_1} \cdot a_{n_2} \dots a_{n_p}$$

și deci:

$$n(p+1) = n(p) \cdot (n(p)+1) + k.$$

Conform principiului inducției complete, enunțul este demonstrat.

1.39. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de numere reale strict pozitive cu ajutorul căruia se construiește șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît:*

$$b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $p, q \in \mathbf{R}_+^*$, *să se exprime, numai în funcție de* p, q *și de termenii șirului* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *termenul general al șirului* $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i(a_{i+1}-1)}{(p+qb_i)(p+qb_{i+1})}.$$

(D.M. Bătineţu, G.M.B, 1970).

Soluție. Avem:

$$\frac{1}{q}\left(\frac{1}{p+qb_i} - \frac{1}{p+qb_{i+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{q}\,\frac{p+qb_{i+1}-p-qb_i}{(p+qb_i)(p+qb_{i+1})} = \frac{b_i(a_{i+1}-1)}{(p+qb_i)(p+qb_{i+1})}. \qquad (1)$$

Ținînd seama de (1) obținem:

$$c_n = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p+qb_i} - \frac{1}{p+qb_{i+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{p+qb_1} - \frac{1}{p+qb_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{p+a_1q} - \frac{1}{p+qa_1a_2\dots a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_1q(a_2a_3\dots a_{n+1}-1)}{q(p+a_1q)(p+qa_1a_2\dots a_{n+1})} = \frac{a_1(a_2a_3\dots a_{n+1}-1)}{(p+a_1q)(p+qa_1a_2\dots a_{n+1})}.$$

1.40. *Se dau punctele* A(a, b) *și* B(b, a) *cu* $b > a > 0$ *și se notează cu* O *originea sistemului de coordonate. În triunghiul* AOB *ducem* AA_1 *perpendicular pe* OB *și* $A_1A_2 \perp AO$, $A_2A_3 \perp OB$ *ș.a.m.d.*

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$ *unde:*

$$S_n = AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

Soluție. Evident:

$$\text{Aria } AOB = S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|a^2 - b^2|}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$AA_1 = \frac{2S}{OB} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k,$$

$$A_1A_2 = \frac{AA_1 \cdot OA_1}{OA}.$$

Dar:

$$OA_1 = \sqrt{AO^2 - AA_1^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - k^2} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Rezultă că:

$$A_1A_2 = \frac{2abk}{a^2 + b^2}.$$

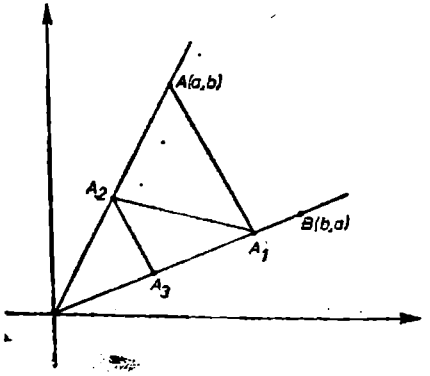

Fig. 1.40

Să calculăm A_2A_3. Avem:

$$A_2A_3 = \frac{OA_2 \cdot A_1A_2}{OA_1} = \frac{OA_1 \cdot A_1A_2}{OA} = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 k.$$

Prin inducție se obține:

$$A_{n-1}A_n = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{n-1} k.$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} (AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(k + k\frac{2ab}{a^2+b^2} + \ldots k\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{k\left(1 - \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^n\right)}{1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}} = \frac{k}{1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{a+b}{b-a} \cdot \sqrt{a^2+b^2}.$$

1.41. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$ *atunci ce putem spune despre* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Soluție. Dacă $x \in \mathbf{R}^*$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x}{x} = 1.$$

Dacă $x = 0$ și există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, atunci $|a| \leqslant 1$.

Într-adevăr, să presupunem contrariul adică $|a| > 1$. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $|a| - \varepsilon > 1$; atunci:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > |a| - \varepsilon > 1$$

pentru $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ deci, echivalent cu:

$$|x_{n+1}| > |x_n|,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

și aceasta demonstrează că șirul $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu poate avea limita zero și deci nici șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu poate avea limita zero. Aceasta este în contradicție cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Contradicția provine din presupunerea absurdă că:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$$

și atunci

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leqslant 1.$$

Dăm acum cîteva exemple astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in [-1, 1].$$

a°). Fie $x_n = \frac{1}{n}$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

b°). Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = -1$;

c°). Fie $x_n = nb^n$, $|b| < 1$; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)b^{n+1}}{n \cdot b^n} = b \in (-1, 1).$$

De asemenea, se poate ca limita raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ să nu existe. Într-adevăr, dacă:

$$x_n = \frac{1}{n}(q + (-1)^n), \quad |q| \neq 1$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ nu există iar dacă $|q| = 1$ atunci șirul cu termenul general $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nici nu este definit.

1.42. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}.$$

Soluție. Notînd:

$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0, \quad (\forall)\ n \geq 2$$

rezultă că:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + b_n > 0$$

de unde:

$$\frac{\ln n}{n} = \ln(1 + b_n) \Leftrightarrow n = \frac{\ln n}{\ln(1 + b_n)}.$$

În continuare avem:

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}} = \frac{b_n(\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{n(n+2)} + \sqrt[3]{n^2})}{2} =$$

$$= \frac{b_n n^{2/3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} b_n n^{2/3} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n b_n}{n^{1/3}} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \ln n}{n^{1/3} \ln(1 + b_n)} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n^{-1} \ln(1 + b_n)} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/3}} = 0.$$

1.43. *Să se demonstreze că dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ x \in \mathbf{R}_+,\ x_n \geq 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}.$$

Soluție. Dacă $x = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dacă și numai dacă $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|x_n| < \varepsilon^2,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon.$$

Rezultă deci că pentru $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $\sqrt{|x_n|} < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ adică:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$$

prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}.$$

Dacă $x > 0$ atunci putem presupune, fără a micșora generalitatea, că $x_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Avem:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \frac{|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}|\,|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} < \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}},\ (\forall)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, fixat; din $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ rezultă că $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon \sqrt{x},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N},\ n > n_\varepsilon.$$

Prin urmare:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| < \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| < \varepsilon,\ (\forall) n > n_\varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

1.44. *Dacă* $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ *și* $x \in \mathbf{Q}$, *să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} a^{\cos^n(n!\,\pi x)}$$

și:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\sin^n(n!\,\pi x)}.$$

Soluție. Din $x \in \mathbf{Q}$ rezultă că $(\exists)\ m,\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$ astfel încît $x = \frac{m}{k}$.

Deoarece n tinde la infinit, de la un anumit n, numărul k se află printre divizorii lui $n!$ și atunci $n!\ \pi x$ este un multiplu par de π. Deci:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\cos^n(n!\,\pi x)} = \lim_{n\to\infty} a^{\cos^n(2s\pi)} = a^1 = a$$

unde $s \in \mathbf{N}^*$.

Analog:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\sin^n(n!\,\pi)} = a^0 = 1.$$

1.45. *Se consideră șirul* $(e_n)_{n\geq 1}$ *unde* $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. *Să se demonstreze că acest șir este monoton și mărginit.*

Soluția I. Este evident că $(\forall)a,\ b \in \mathbf{R}$, și $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, avem:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i$$

și deci, dacă vom considera $a,\ b \in \mathbf{R}_+^*,\ a > b$, rezultă:

$$(a - b)\ b^n(n + 1) < a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)\ a^n(n + 1). \quad (1)$$

Dacă luăm $a = 1 + \frac{1}{n}$, $b = 1 + \frac{1}{n+1}$ atunci obținem:

$$a - b = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},\ a^{n+1} = a\,e_n,\ b^{n+1} = e_{n+1}$$

și, prin urmare, avem:

$$a = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} = \frac{a-1}{b-1} > b.$$

Rezultă atunci că:

$$b^2 < a + b - 1 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

și deci:

$$b^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) b^n.$$

Inegalitatea a doua din (1) ne dă:

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)(n+1)\, a^n$$

adică:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) c_n - c_{n+1} < \frac{1}{n(n+1)} \cdot (n+1) \cdot c_n$$

sau încă:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) c_n - \frac{1}{n+1} \cdot c_n < c_{n+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$c_n < c_{n+1}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă notăm $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, atunci este evident că $c_n < u_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și că:

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) b^n.$$

Din prima inegalitate (1), adică din:

$$(n+1)(a-b)\, b^n < a^{n+1} - b^{n+1}$$

obținem:

$$(n+1) \frac{1}{n(n+1)}\, b^n < u_n - b^{n+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\left(\frac{1}{n} + b\right) b^n < u_n$$

de unde rezultă că:

$$u_{n+1} < \left(\frac{1}{n} + b\right) b^n < u_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

adică șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este strict descărcător.

Deci, șirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și avem:

$$e_n < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}985984\ldots$$

adică $e_n < 3$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Fiind strict crescător și mărginit superior, rezultă că șirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este convergent și notăm $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$.

Soluția II. Dezvoltînd binomul după *Newton*[1], avem:

$$e_n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} = 1 + 1 +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} +$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-$$

$$-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Aceasta este adevărată deoarece:

$$1 - \frac{k}{n} < 1,\ (\forall)\ k \in \{1, 2\ldots n-1\}.$$

Avînd în vedere că:

$$n! > 2^{n-1},\ (\forall)\ n \geq 2,$$

rezultă:

$$2 < e_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = .$$

Așadar șirul $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este **mărginit**.

[1] Newton, Isaac (1642—1727) — mare matematician și fizician englez.

Același calcul ne dă:

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)!} > 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n!}.$$

Deoarece $n + 1 > n$ rezultă $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n}$ și deci:

$$1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}, \quad (\forall)k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Pe baza celor de mai sus, obținem:

$$e_{n+1} > 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} = e_n$$

și deci $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

1.46. *Să se arate că șirul cu termenul general*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \; n \geq 1$$

este descrescător și mărginit.

Soluție. Din inegalitățile:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

se obține;

$$\frac{1}{n+1} < \ln (1+n) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Dînd lui n valorile $1, 2, \ldots, k$ și adunînd inegalitățile obținute, membru cu membru, avem:

$$\ln k < \ln (k+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k},$$

de unde rezultă $a_k > 0$ adică șirul este format din termeni strict pozitivi.

Din:

$$a_k - a_{k+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} < 0$$

rezultă că șirul este descrescător. Fiind descrescător și mărginit inferior rezultă că este convergent. Limita acestui șir este $C = 0{,}5772\ldots$ și se numește *constanta lui* EULER[1].

1.47. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{8}{(3m+2k+1)(3m+2k+3)}\right).$$

Soluție. Aducînd la același numitor termenii diferenței:

$$1 - \frac{8}{(3m+2k+1)(3m+2k+3)}$$

și, reducînd termenii asemenea, obținem:

$$\frac{9m^2 + 12m(k+1) + 4k^2 + 8k - 5}{(3m+2k+1)(3m+2k+3)}.$$

Numărătorul fiind un trinom de gradul al doilea în m, se descompune ușor, obținîndu-se egalitatea:

$$9m^2 + 12(k+1)m + 4k^2 + 8k - 5 = (3m+2k+5) \cdot (3m+2k-1).$$

[1] Euler, Leonhard (1707–1783) – matematician și fizician elvețian.

Pe baza acestor considerente, putem scrie:

$$a = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{8}{(3m+2k+1)(3m+2k+3)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k\to\infty}^{n} \frac{(3m+2k-1)(3m+2k+5)}{(3m+2k+1)(3m+2k+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3m+1)(3m+7)}{(3m+3)(3m+5)} \cdots \frac{(3m+2n-1)(3m+2n+5)}{(3m+2n+1)(3m+2n+3)}.$$

Efectuînd simplificările, se obține în final:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{3m+1}{3m+5} \cdot \frac{3m+2n+5}{3m+2n+3} = \frac{3m+1}{3m+5} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3m+2n+5}{3m+2n+3} = \frac{3m+1}{3m+5}.$$

1.48. *Să se arate că oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$ *și* $a \in \mathbf{R}$, *avem:*

$$\cos a = (-1)^n \cos (a - n\pi),$$

și să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \cos n\pi \sqrt[2n]{e}.$$

(V. Matrosenco, G.M. 15728).

Soluție. Avem:

$$(-1)^n \cos (a - n\pi) = (-1)^n (\cos a \cos n\pi + \sin a \sin n\pi) =$$

$$= (-1)^n (-1)^n \cos a = \cos a, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Așadar:

$$a_n = \cos n\pi \sqrt[2n]{e} = (-1)^n \cos (n\pi \sqrt[2n]{e} - n\pi) =$$

$$= (-1)^n \cos n\pi (\sqrt[2n]{e} - 1) = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2} \frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{\frac{1}{2n}}$$

și, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{e}-1}{\frac{1}{2n}}=1.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt[2n]{e}-1}{\frac{1}{2n}}=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

și, deoarece șirul $(-1)^n$ este mărginit, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

1.49. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ unde:

$$a_n=\frac{\sin 1}{n^2+1}+\frac{\sin 2}{n^2+2}+\ldots+\frac{\sin n}{n^2+n}.$$

Soluție. Avem:

$$|a_n|\leqslant\frac{|\sin 1|}{n^2+1}+\frac{|\sin 2|}{n^2+2}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^2+n}<$$

$$<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}=b_n.$$

Vom dovedi că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ și atunci rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Într-adevăr:

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}}_{\text{de } n \text{ ori}}<b_n<$$

$$<\underbrace{\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

deci:

$$\frac{n}{n^2+n}<b_n<\frac{n}{n^2+1}$$

de unde rezultă, prin trecere la limită, că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

1.50 *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^3 - 5k^2 + 3k - 7}{2k^3 + k^2 - k - 7} \cdot \frac{k^3 - 4k^2 + k - 3}{k^3 - 7k^2 + 12k - 9}.$$

Soluție. Fie $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$ unde pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$, $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x - 3$.

Atunci:

$$P(x+1) = 2x^3 + x^2 - x - 7,\ Q(x-1) = (x-1)^3 - 4(x-1)^2 + (x-1) - 3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 4x^2 + 8x - 4 + x - 1 - 3 = x^3 - 7x^2 + 12x - 9.$$

Deci:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^3 - 5k^2 + 3k - 7}{2k^3 + k^2 - k - 7} \cdot \frac{k^3 - 4k^2 + k - 3}{k^3 - 7k^2 + 12k - 9} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{P(k)}{P(k+1)} \cdot \frac{Q(k)}{Q(k-1)} = \frac{P(1)}{Q(0)} \cdot \frac{Q(n)}{P(n+1)} =$$

$$= \frac{-7}{-3} \cdot \frac{2n^3 + n^2 - n - 7}{n^3 - 4n^2 + n - 3}$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{14}{3}.$$

1.51. *Fiind dat șirul* $(a_n)_{n\geq 2}$ *cu:*

$$a_n = \left(\frac{1 + \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluție. Dacă notăm:

$$u_n = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

rezultă atunci că:

$$a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n}\right)^{\frac{1}{u_n} \cdot n^3}$$

și deci $\lim_{n\to\infty} a_n = e^x$ unde:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{n} - 1\right) n^3 =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n^3 \sin\frac{\pi}{n} \cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n} =$$

$$= -2\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \cdot \frac{\pi^3}{2^2} = -\frac{\pi^3}{2}$$

și deci $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{\pi^3}{2}}$.

1.52. *Se consideră șirurile* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ *de termeni generali:*

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} C_{kn-kp}^{k}}{\prod_{k=1}^{n} C_{kn-pk-1}^{k}}; \quad b_n = \left(\frac{n^2 - \alpha_n \sum_{k=1}^{n} (C_n^k)^2}{n(n-1)}\right)^n$$

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *fiind un șir de termeni pozitivi convergent la* 0.

a°). *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} a_n$;

b°). *Să se determine* α_n *astfel încît* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Soluție. a°). Avem:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(kn-kp)!}{k!(kn-kp-k)!} \cdot \frac{k!(kn-kp-k-1)!}{(kn-kp-1)!} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{kn-kp}{kn-kp-k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n-p}{n-p-1} = \left(\frac{n-p}{n-p-1}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-p-1}\right)^n$$

și, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

b°). Avem:

$$b_n = \left(\frac{n^2 - \alpha_n \sum\limits_{k=1}^{n} (C_n^k)^2}{n(n-1)}\right)^n = \left(\frac{n(n-1) + n - \alpha_n \sum\limits_{k=1}^{n} (C_n^k)^2}{n(n-1)}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{n - \alpha_n \sum\limits_{k=1}^{n} (C_n^k)^2}{n(n-1)}\right)^n = \left(1 + \frac{n - \alpha_n C_{2n}^n}{n(n-1)}\right)^n.$$

Am ținut seama, în calculele de mai sus, că:

$$\sum_{k=1}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Dacă luăm:

$$\alpha_n = \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n-1}{n(n-1)}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

1.53. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *unde:*

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} [\sqrt{i}]_*, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3}$.

Soluție. În fiecare interval $I_m = [m^2, (m+1)^2)$, $m \in \mathbf{N}$, există $2m+1$ numere naturale și pentru orice $i \in I_m$ avem $[\sqrt{i}]_* = m$.

Deci:

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1)\, i + n = 2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i =$$

$$= 2\,\frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(4n^2 - 6n + 2 + 3n + 3)}{6} = \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n + 5}{6n^2} = \frac{2}{3}.$$

1.54. *Să se calculeze limita șirului* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)\,(n+2)}{n^4},$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Deoarece:

$$k(k+1)\,.\,(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$$

rezultă că:

$$a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{n^4}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} + \right.$$

$$\left. + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

1.55. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} arctg \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

Soluție. Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$\frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{k(k+1) + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k(k+1)}}{1 + \frac{1}{k(k+1)}} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1}}$$

și deci:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1 + k + k^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1}, \quad (\forall)\, k \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă deci că:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + k + k^2} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

1.56. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \cos a \cos \frac{a}{2} \ldots \cos \frac{a}{2^n},$$

unde $a \neq k\pi$, $(\forall)\, k \in \mathbf{Z}$.

Soluție. Plecînd de la identitatea:

$$u_n = \cos a \cos \frac{a}{2} \ldots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin 2a}{\sin \frac{a}{2^n}}, \quad (\forall)\, a \neq k\pi$$

deducem:

$$u_n = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin \frac{a}{2^n}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sin 2a}{2a} = \frac{1}{a} \sin a \cos a.$$

1.57. *Se consideră şirul* $(a_n)_{n\geqslant 2}$ *definit de:*

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} log_{1/3}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Să se calculeze limita şirului $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *având termenul general:*

$$b_n = n \cdot ln\ a_n.$$

Soluţie. Avem:

$$a_n = \log_{\frac{1}{3}} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{3n} =$$

$$= 1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{n}$$

şi, prin urmare:

$$b_n = n \ln\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{n}\right) = \ln\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{n}\right)^n.$$

Prin trecere la limită rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{n}\right)^n =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{3}}\left(1 +$$

$$+ \frac{2}{n}\right)^n = \log_{\frac{1}{3}} e^2 = 2 \log_{\frac{1}{3}} e.$$

1.58. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)-1}{(k!)^2(k+1)(k+2)}.$$

Soluţie. Deoarece:

$$\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)-1}{(k!)^2(k+1)(k+2)} = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{(k!)^2(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k!)^2(k+1)(k+2)} = \frac{1}{((k-2)!)^2(k-1)k} - \frac{1}{(k!)^2(k+1)(k+2)}$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)(k-2)-1}{(k!)^2(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(0!)^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{(1!)^2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{((n-1)!)^2 \cdot n(n+1)} - \frac{1}{(n!)^2(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

1.59. *Folosind faptul că:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) = e$$

să se calculeze:

$$I_3 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!}\right), \quad I_4 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{n} \frac{k^4}{k!}\right).$$

Soluţie. Determinînd constantele $A, B, C \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$\frac{k^3}{k!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + A \cdot \frac{k(k-1)}{k!} + B \cdot \frac{k}{k!} + C \cdot \frac{1}{k!},$$

$$(\forall)\ k \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}$$

obținem $A = 3$, $B = 1$, $C = 0$. Rezultă deci că:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!} = 1 + \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} + 3 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-2)!} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = 1 + \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1}{j!} + 3 \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j!} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j!} =$$

$$= 5\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 + 1 + 4 + 1 - \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!} -$$

$$- \frac{1}{n!} - \frac{3}{(n-1)!} - \frac{3}{n!} - 5 - 1 - \frac{1}{n!} =$$

$$= 5\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 - \frac{1}{(n-2)!} - \frac{4}{(n-1)!} - \frac{5}{n!}.$$

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!}\right) = 5 \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 -$

$$- \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{4}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) = 5e + 1.$$

Analog, rezultă:

$$\frac{k^4}{k!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{k!} + 6 \cdot \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} +$$

$$+ 7 \cdot \frac{k(k-1)}{k!} + \frac{k}{k!}, \ (\forall)\, k \geq 4$$

și deci $l_4 = 15e + 1$.

160. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k}}.$$

Soluție. Avem:

$$\frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k} = \frac{k^2 - k + 1}{k(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

adică:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

1.61. *Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt[3]{n^3 + n + x})\pi, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Soluție. Avem:

$$\sin((\sqrt[3]{n^3 + n + x} - n)\pi + n\pi) =$$

$$= \sin(\sqrt[3]{n^3 + n + x} - n)\pi \cos n\pi +$$

$$+ \cos(\sqrt[3]{n^3 + n + x} - n)\pi \sin n\pi =$$

$$= (-1)^n \sin(\sqrt[3]{n^3 + n + x} - n)\pi =$$

$$= (-1)^n \sin \frac{n^3 + n + x - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 + n + x)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + n + x} + n^2} \cdot \pi =$$

$$= (-1)^n \sin \frac{n + x}{\sqrt[3]{(n^3 + n + x)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + n + x} + n^2} \cdot \pi.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt[3]{n^3 + n + x})\pi = 0.$$

Deoarece șirul $x_n = (-1)^n$ este mărginit iar șirul cu termenul general:

$$y_n = \sin \frac{n + x}{\sqrt[3]{(n^3 + n + x)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + n + x} + n^2} \cdot \pi$$

este convergent către zero atunci limita din enunț este zero, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

1.62. *Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left[x + \frac{a}{n}\right] + \left[x + \frac{2a}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{(n-1)a}{n}\right]\right).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(x+\frac{ka}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)na}{2n^2}=x+\frac{a}{2}.$$

1.63. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x^2+\frac{2iax}{n}+\frac{i^2a^2}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)x^2}{n}+\frac{2ax}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}i+\frac{a^2}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)=$$

$$=x^2+2ax\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}+a^2\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n\,(2n-1)}{6n^3}=$$

$$=x^2+2ax+\frac{a^2}{3}.$$

1.64. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}.$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{2^2\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+n}{4\sum_{k=1}^{n}k^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n}{4\cdot\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}}=1.$$

1.65. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right),\quad x\in\mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Dacă $x>1$ atunci:

$$\sqrt[n]{x}>1,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$$

și atunci, notînd:

$$a_n=\sqrt[n]{x}-1>0,\quad (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$$

avem, $\sqrt[n]{x}=1+a_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Deci $x=(1+a_n)^n$ adică $\ln x=n\ln(1+a_n)$ sau $n=\dfrac{\ln x}{\ln(1+a_n)}$. Deci:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln x}{\ln(1+a_n)}=$$

$$=\ln x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x.$$

Dacă $x=1$, atunci:

$$n(\sqrt[n]{1}-1)=0,\quad (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$$

prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=0=\ln 1=\ln x.$$

Dacă $x\in(0,1)$, atunci $y=\dfrac{1}{x}\in(1,+\infty)$ și deci avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-\sqrt[n]{y})}{\sqrt[n]{y}}=\lim_{n\to\infty} n(1-\sqrt[n]{y})=$$

$$=-\ln y=-\ln\frac{1}{x}=\ln x.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\ln x,\quad (\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*.$$

1.66. *Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} tg^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right).$$

Soluţie. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{n}}\right)^{n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}{\left(\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{-\operatorname{ctg}\frac{1}{n}}\right)^{-n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}=\frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}{e^{-\lim\limits_{n\to\infty} n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}=$$

$$=e^{2\lim\limits_{n\to\infty} n\operatorname{tg}\frac{1}{n}}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}=e^2.$$

1.67. *Fie*:

$$u_n=\sum_{i=1}^{n} i,\quad v_m=\sum_{n=1}^{m} u_n.$$

Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_m}{m^k},\quad k\in\mathbf{N}^*.$$

(Admitere, Facultatea de Matematică, Bucureşti, 1970)

Soluţie. Avem:

$$u_n=\frac{n(n+1)}{2},\ v_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{m}n^2+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{m}n=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}=$$

$$=\frac{m(m+1)}{4}\left(\frac{2m+1}{3}+1\right)=\frac{m(m+1)(2m+4)}{12}=$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

Deci:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{v_m}{m^k}=\frac{1}{6}\lim_{m\to\infty}\frac{m(m+1)(m+2)}{m^k}=\begin{cases}+\infty \text{ pentru } k\in\{1,2\}\\ \frac{1}{6} \text{ pentru } k=3\\ 0 \text{ pentru } k\geqslant 4.\end{cases}$$

1.68. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right),\ a\in\mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Dacă $a=1$ atunci $n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)=0$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$ și deci, în acest caz:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)=0.$$

Dacă $a>1$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(a^{\frac{2}{n}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{2}{n}}-1\right)$$

Prin urmare, notînd $b_n=a^{\frac{2}{n}}-1$ avem $b_n>0$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

Deoarece, $b_n=a^{\frac{2}{n}}-1 \Leftrightarrow {}^{\frac{2}{n}}=1+b_n \Leftrightarrow \frac{2}{n}\ln a=$ $=\ln(1+b_n)$ rezultă că:

$$n=\frac{2\ln a}{\ln(1+b_n)}$$

și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n\cdot 2\ln a}{\ln(1+b_n)}=2\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}}=$$

$$=2\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=2\ln a.$$

Dacă $a < 1$ atunci, notînd $c = \frac{1}{a}$, avem $c > 1$ și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(c^{-\frac{1}{n}} - c^{\frac{1}{n}}\right) = -\lim_{n\to\infty} n\left(c^{\frac{1}{n}} - c^{-\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= -2\ln c = -2(-\ln a) = 2\ln a.$$

Deci, $(\forall)\, a \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}\right) = 2\ln a.$$

Dacă $a = e$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}\right) = 2$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sh}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{2} = 1.$$

1.69. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{\sqrt{i+1}\cdot\sqrt{i+2}}.$$

Soluție. Dacă notăm:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{i+1}},\quad v_i = \frac{1}{\sqrt{i+2}}$$

atunci avem:

$$\sqrt{1-u_i^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{i+1}} = \sqrt{\frac{i}{i+1}},$$

$$\sqrt{1-v_i^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{i+2}} = \sqrt{\frac{i+1}{i+2}}$$

și atunci obținem:

$$x_i = \arcsin \frac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{\sqrt{i+1}\cdot\sqrt{i+2}} = \arcsin\left(u_i\sqrt{1-v_i^2} - \right.$$

$$\left. - v_i\sqrt{1-u_i^2}\right) = \arcsin u_i - \arcsin v_i = \arcsin u_i - \arcsin u_{i+1}.$$

Rezultă atunci că:

$$\sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}\cdot\sqrt{i+2}} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \arcsin u_1 - \arcsin u_{n+1} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \arcsin 1 - \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

1.70. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu* $x_0 = 1936$, $x_1 = 1978$, $x_2 = 42$ *şi:*

$$x_n = \frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \ldots + \frac{n^3-2}{n!}, \quad (\forall)\ n \geq 3.$$

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie. Fie $n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}$; atunci:

$$x_n = \frac{n+2}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^3-2}{k!} = \frac{n+2}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^3-k+k-2}{k!} =$$

$$= \frac{n+2}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)+k-2}{k!} = \frac{n+2}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-2)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k-1)!} - \frac{2}{k!} \right) = \frac{n+2}{n!} + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s!} -$$

$$- 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{n+2}{n!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{(n-1)!} -$$

$$- \frac{2}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{2}{n!} + 3 - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} = 3,$$

$$(\forall)\ n \geq 3.$$

Prin urmare, șirul $(x_n)_{n\geqslant 3}$ este 3-constant și atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

1.71. *Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n!\,\pi x) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \cos(n!\pi x) = 1, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{Q}.$$

Soluție. Prin ipoteză, avem $x = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbf{Z}$ și $q \neq 0$. Evident, putem presupune $q > 0$. Deci:

$$\frac{n!x}{2} = 1 \cdot 2 \ldots n \cdot \frac{p}{2q} \in \mathbf{Z}$$

dacă $n \geqslant 2q$ și deci $n!\pi x$ este un multiplu întreg de 2π pentru $n \geqslant 2q$.

Prin urmare:

$$\sin(n!\pi x) = 0, \quad \cos(n!\pi x) = 1, \quad (\forall)\ n \geqslant 2q$$

și deci: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n!\pi x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n!\pi x) = 1$.

1.72. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir mărginit de numere strict pozitive. Pentru* $\varepsilon > 0$ *fie* $N_\varepsilon(n)$ *numărul acelora dintre* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *care sînt mai mici sau egale cu* ε. *Să se arate că dacă* $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ *avem:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_\varepsilon(n)}{n} = 1,$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} = 0.$$

Soluție. Conform ipotezei, există $M > 0$ astfel încît:

$$0 < a_i < M, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $N_\varepsilon(n)$ elemente dintre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt mai mici sau egale decît ε atunci:

$$0 < \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \varepsilon \cdot N_\varepsilon(n) + M(n - N_\varepsilon(n)).$$

Deci:

$$0 < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant \frac{\varepsilon \cdot N_\varepsilon(n) + M(n - N_\varepsilon(n))}{n} = \frac{(\varepsilon - M)N_\varepsilon(n)}{n} + M.$$

Prin trecere la limită obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant \varepsilon - M + M = \varepsilon.$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{m}$; atunci avem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Prin urmare, $(\forall)\ m \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant \frac{1}{m}$$

de unde, prin trecere la limită după m, rezultă:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = 0.$$

1.73. *Se dă șirul:*

$$x_n = \frac{a^n}{(1 + a)(1 + a^2) \dots (1 + a^n)},\ a > 0.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Dacă $0 < a < 1$, avem $x_n < a^n$ și, pe baza criteriului majorării, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, căci $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Pentru $a > 1$, avem:

$$x_n < \frac{a^n}{a \cdot a^2 \dots a^n} = \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Pentru $a = 1$, $x_n = \frac{1}{2^n}$ și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.74. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} a^n \sin\frac{\pi}{a^n},\ a \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Dacă $0 < a < 1$ atunci:

$$0 \leqslant \sin\frac{\pi}{a^n} \leqslant 1$$

deci:

$$0 \leqslant a^n \sin\frac{\pi}{a^n} \leqslant a^n$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a^n \sin\frac{\pi}{a^n} = 0.$$

Dacă $a = 1$, atunci:

$$x_n = a^n \sin\frac{\pi}{a^n} = \sin\pi = 0,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dacă $a > 1$ atunci:

$$x_n = \pi \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{a^n}}{\frac{\pi}{a^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \pi.$$

1.75. *Să se calculeze:*

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n.$$

Soluție. Avem, succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^{\frac{n+\sqrt[3]{n}+2}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1}}\right)^{\frac{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1)}{n+\sqrt[3]{n}+2}}\right) = +\infty.$$

1.76. *Să se explicitezе funcția* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *unde*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Soluție. Pentru $x < 0$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = 0$ și deci $f(x) = x^2$; pentru $x = 0$, $f(x) = 0$, iar pentru $x > 0$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2e^{-nx} + x}{e^{-nx} + 1} = x.$$

Astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

1.77. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 3n + 4}.$$

Soluție. Avem:

$$\sqrt[n]{n^2 + 3n + 4} = \sqrt[n]{n^2\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} = \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 3n + 4} = 1.$$

1.78. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[5]{3n + 1} - \sqrt[5]{2n + 1}).$$

Soluție. Avem:

$$\sqrt[5]{3n + 1} - \sqrt[5]{2n + 1} =$$

$$= \frac{(3n + 1) - (2n + 1)}{\sqrt[5]{(3n + 1)^4} + \sqrt[5]{(3n + 1)^3(2n + 1)} + \ldots + \sqrt[5]{(2n + 1)^4}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{3n+1}-\sqrt[5]{2n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\frac{4}{5}}\left(\sqrt[5]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^4}+\ldots+\sqrt[5]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4}\right)}=+\infty.$$

1.79. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}$$

unde $k\in\mathbf{N}^*-\{1\}$:

Soluție. Avem:

$$\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}=$$

$$=\frac{\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}{\sqrt[k]{\left(n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}\right)^{k-1}}+\ldots+\sqrt[k]{n^{k-1}}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right)=\frac{1}{k}.$$

1.80. *Să se afle limitele șirurilor date respectiv de termenii generali:*

$$a_n=\sqrt{n+2\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+4\sqrt{n+1}},\ n\in\mathbf{N},$$

$$b_n=\sqrt{n+11+8\sqrt{n+5}}-\sqrt{n+4+2\sqrt{n+5}},\ n\in\mathbf{N},$$

$$c_n=\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}},\ n\geq 1.$$

(C. Ionescu-Țiu, G.M.B. 1974).

Soluție. Avem, succesiv:

$$a_n=\frac{-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+4\sqrt{n+1}}}$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-1;$$

$$b_n=\frac{7+6\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+11+8\sqrt{n+5}}+\sqrt{n+4+2\sqrt{n+5}}}$$

şi prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3;$$

$$c_n = \frac{2\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}}$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty.$$

1.81. *Să se calculeze limitele şirurilor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *date respectiv de termenii generali:*

$$a_n = \sqrt{n^2+4n+5} - \sqrt{n^2-4n+20},$$

$$b_n = \sqrt{n^2+4n+20} - \sqrt{n^2-4n+5},$$

$$c_n = \sqrt{n^2+5n-4\sqrt{n}+8} - \sqrt{n^2-3n+2\sqrt{n}+5}.$$

Soluţie. Avem:

$$a_n = \frac{(n^2+4n+5)-(n^2-4n+20)}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2-4n+20}} =$$

$$= \frac{8n-15}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{20}{n^2}}\right)}.$$

Deci, $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

Analog, obţinem $\lim_{n\to\infty} b_n = 4$; $\lim_{n\to\infty} c_n = 4$.

1.82. *Să se calculeze:*

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (1^2+2^2+\ldots k^2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)},$$

Soluție. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\ldots+k^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{6}\left(2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\right.$$

$$\left.+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=$$

$$=\frac{n^3(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{12}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}.$$

Deci:

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{12}.$$

1.83. *Să se calculeze:*

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n+7}.$$

Soluție. Deoarece:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

rezultă:

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n+7)}=\frac{1}{3}.$$

1.84. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Soluție. Plecînd de la identitatea (v. [12]):

$$u_n=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*$$

deducem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}.$$

1.85. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k}{n^k}$.

Soluție. Avem:

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!\, n^{k-1}} =$$

$$= \frac{n^{k-1} - (1+2+\dots+k-1)n^{k-2} + \dots + (-1)(-2)\dots(-k+1)}{k!\, n^{k-1}}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

1.86. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2})}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = 0.$$

1.87. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

1.88. *Pentru șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de termen general*

$$x_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Deoarece $k! < n!$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ rezultă că:

$$1! + 2! + \ldots + n! < n \cdot n!$$

și deci:

$$0 < x_n < \frac{n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}.$$

Prin trecere la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.89. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Soluție. Avem:

$$0 < \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\cdot 2\ldots n} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}, \quad (\forall) n \geqslant 5$$

și atunci, prin trecere la limită, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

1.90. *Dacă* $a \in \mathbf{R}_+^*$ *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$.

Soluție. Deoarece mulțimea numerelor reale este un spațiu arhimedian rezultă că $(\exists) k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $k > 2a$.

Pentru $n > k$ avem:

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\right) \cdot \left(\frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n}\right),$$

Dar:

$$\frac{a}{i} \leqslant a, \ (\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$$

și:

$$\frac{a}{j} < \frac{1}{2}, \ (\forall)\, j \in \{k, k+1, \ldots, n\}$$

și atunci obținem:

$$0 < \frac{a^n}{n!} < a^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} = \frac{(2a)^{k-1}}{2^n}$$

de unde prin trecere la limită rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

1.91. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *dacă:*

$$x_n = n\left(\frac{2}{5}\right)^n + n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}.$$

Soluție. Deoarece $\frac{2}{5} < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ și, dacă ținem seama că:

$$0 < \sin \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{3^n}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

deducem:

$$0 < n^2 \sin \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi n^2}{3^n}$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n} = 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.92. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Fără a restrînge generalitatea, vom presupune $\alpha \geqslant \beta$. Atunci, dacă $\alpha > \beta$, avem:

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} = \frac{\alpha^n\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\alpha^{n+1}\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}$$

și, prin trecere la limită, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\alpha}$.

Dacă $\alpha = \beta$ atunci:

$$x_n = \frac{2\alpha^n}{2\alpha^{n+1}} = \frac{1}{\alpha}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\alpha}.$$

În concluzie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\max(\alpha, \beta)}.$$

1.93. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

deci:

$$x_{n+1} > x_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

adică șirul dat este strict crescător.

Logaritmînd termenul general obținem:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad (\forall)\, n\in\mathbf{N}^*.$$

Deci, $x_n < e$, $(\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$, adică șirul dat este și mărginit superior. Prin urmare șirul dat este convergent. Din:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

obținem:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)x_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă:

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=2.$$

1.94. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n},\quad |a|,\ |b|\in(0,\ 1).$$

Soluție. Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

1.95. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Soluție. Avem:

$$a_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3^2+3+1}{3^2-3+1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4^2+4+1}{4^2-4+1}\cdot\frac{4}{6}\cdot$$

$$\cdot\frac{5^2+5+1}{5^2-5+1}\cdots\frac{(n-3)}{(n-1)}\cdot\frac{(n-2)^2+(n-2)+1}{(n-2)^2-(n-2)+1}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot$$

$$\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\cdot\frac{(n-1)}{(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3^2+3+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{3}{5}\cdot$$

$$\cdot\frac{4^2+4+1}{3^2+3+1}\cdots\frac{(n-3)}{(n-1)}\cdot\frac{(n-2)^2+(n-2)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot$$

$$\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-2)^2+(n-2)+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n-1)^2+(n-1)+1} =$$

$$= \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

1.96. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\ldots(3+\sqrt{n})}.$$

Soluție. Avem:

$$3+\sqrt{i} > \sqrt{i+1},\ (\forall)\ i\in\mathbf{N}^*$$

echivalent cu:

$$3 > \sqrt{i+1}-\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}},\ (\forall)\ i\in\mathbf{N}^*.$$

Deci

$$0 < \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\ldots(3+\sqrt{n})} <$$

$$< \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\ldots\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă că limita din enunț este zero.

1.97. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^5}{(2n)!\,8^n}}.$$

Soluție. Notînd $x_n = \frac{(n!)^5}{(2n)!\,8^n}$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^5}{(2n)!\,8^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^5}{(2n+2)!\,8^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!\,8^n}{(n!)^5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{8(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{32}.$$

1.98. *Dacă șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este definit prin:*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{5\cdot 3^n + (-1)^n}{3}$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Avem:

$$x_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{5\cdot 3^n + (-1)^n}{3^n} = \frac{3^{n+1} - 1}{2\cdot 3^n} \cdot \frac{5\cdot 3^n + (-1)^n}{3^n} =$$

$$= \frac{3^{n+1}\left(1 - 3^{\frac{1}{n+1}}\right)}{2\cdot 3^n} \cdot \frac{3^n\left(5 + \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)}{3^n} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot\left(5 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

De aici obținem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}\cdot 5 = \frac{15}{2}.$$

1.99. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *unde:*

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{5^n} + \frac{\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Soluție. Deoarece $\lim_{n\to\infty} n\,a^n = 0$ dacă $|a|<1$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\, n}{5^n} = 0$$

și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}}}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

1.100. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{42^n + 90\cdot 1936^n + 81\cdot 1978^n}{55^n + 44\cdot 1960^n + 27\cdot 1978^n}.$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{42^n + 90\cdot 1936^n + 81\cdot 1978^n}{55^n + 44\cdot 1960^n + 27\cdot 1978^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{42}{1978}\right)^n + 90\cdot\left(\frac{1936}{1978}\right)^n + 81}{\left(\frac{55}{1978}\right)^n + 44\cdot\left(\frac{1960}{1978}\right)^n + 27} =$$

$$= \frac{0+0\cdot 90+81}{0+0\cdot 44+27} = \frac{81}{27} = 3.$$

1.101. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\frac{n^2-1}{5n^3+1}+\frac{4n^2-7}{5n^3+3}\right).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\frac{n^2-1}{5n^3+1}+\frac{4n^2-7}{5n^3+3}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{5n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-7}{5n^3+3}=1\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1.$$

1.102. *Să se arate că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{x}$.

Soluție. Vom distinge mai multe cazuri după cum urmează.

1°). $x<0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x < 0$, rezultă că există $m\in\mathbf{N}$ astfel încît $x_n<0$, $(\forall)n>m$. Fără a micșora generalitatea putem presupune că $m=0$ (am lăsat la o parte un număr finit de termeni ai șirului operație care nu influențează asupra limitei șirului). Avem:

$$|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{x}|=\frac{|(\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x\cdot x_n}+\sqrt[3]{x^2})|}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x\cdot x_n}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{|x_n-x|}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x\cdot x_n}+\sqrt[3]{x^2}}<\frac{|x_n-x|}{\sqrt[3]{x^2}},\quad(\forall)n\in\mathbf{N},$$

unde am ținut seama de identitatea:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Fie $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, fixat. Din faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ rezultă că $(\exists)n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încît pentru orice $n>n_\varepsilon$ să avem:

$$|x_n-x|<\varepsilon\cdot\sqrt[3]{x^2}$$

și atunci

$$|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{x}|<\frac{|x_n-x|}{\sqrt[3]{x^2}}<\frac{\varepsilon\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\varepsilon,\ (\forall)n>n_\varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{x}.$$

2°). $x = 0$. Prin ipoteză, $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\, n > n_\varepsilon$ are loc $|x_n| < \varepsilon^3$. Deci $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n > n_\varepsilon$ are loc $|\sqrt[3]{x_n}| < \varepsilon$ echivalent cu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = 0 = \sqrt[3]{0}$.

3°). $x > 0$. Ca și în cazul $x < 0$, putem presupune $x_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și atunci obținem:

$$\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{x} = \frac{|x_n - x|}{\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x x_n} + \sqrt[3]{x^2}} < \frac{|x_n - x|}{\sqrt[3]{x^2}},$$

de unde rezultă, ca și în cazul $x < 0$, că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{x}$.

1.103. *Să se demonstreze că dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \geqslant 0$, $x_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k]{x_n} = \sqrt[2k]{x},\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Dacă $x = 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$; $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $|x_n| < \varepsilon^{2k}$, $(\forall)\, n > n_\varepsilon \Rightarrow (\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît $\sqrt[2k]{|x_n|} < \varepsilon$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[2k]{|x_n|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[2k]{x_n} = 0 = \sqrt[2k]{x}$.

Dacă $x > 0$, atunci putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $x_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Avem:

$$|\sqrt[2k]{x} - \sqrt[2k]{x}| =$$

$$= \frac{|\sqrt[2k]{x_n} - \sqrt[2k]{x}|\left(\sqrt[2k]{x_n^{2k-1}} + \sqrt[2k]{x \cdot x_n^{2k-2}} + \ldots + \sqrt[2k]{x_n \cdot x^{2k-2}} + \sqrt[2k]{x^{2k-1}}\right)}{\sqrt[2k]{x_n^{2k-1}} + \sqrt[2k]{x \cdot x_n^{2k-2}} + \ldots + \sqrt[2k]{x_n x^{2k-2}} + \sqrt[2k]{x^{2k-1}}} <$$

$$< \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k]{x^{2k-1}}},\ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Dar, $\lim x_n = x$ dacă și numai dacă $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon \cdot \sqrt[2k]{x^{2k-1}}, \quad (\forall)n > n_\varepsilon .$$

Prin urmare, $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n > n_\varepsilon$ avem:

$$|\sqrt[2k]{x_n} - \sqrt[2k]{x}| < \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k]{x^{2k-1}}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt[2k]{x^{2k-1}}}{\sqrt[2k]{x^{2k-1}}} = \varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k]{x_n} = \sqrt[2k]{x}.$$

1.104. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Soluție. Deoarece:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \quad (\forall)k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$$

atunci:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

1.105. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *unde:*

$$a_n = \underbrace{\sin \sin \dots \sin}_{n \text{ ori}} x.$$

Soluție. Considerăm $\sin x \geqslant 0$ (pentru $\sin x < 0$ procedăm analog). Avem: $0 \leqslant a_n = \sin a_{n-1} \leqslant a_{n-1} \leqslant 1$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, de unde rezultă monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbf{R}$; atunci, din $a_n = \sin a_{n-1}$, prin trecere la limită, obținem $a = \sin a$ de unde rezultă $a = 0$.

1.106. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\quad x\in\mathbf{R}_+.$$

Soluţie. Pentru $x\in[0,\ 1]$ avem:

$$1<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3};$$

pentru $x\in(1,\ 2)$ avem:

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}<x\sqrt[n]{3}$$

iar pentru $x\in[2,\ +\infty)$ avem:

$$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1 \text{ pentru } x\in[0,\ 1]\\ x \text{ pentru } x\in(1,\ 2)\\ \dfrac{x^2}{2} \text{ pentru } x\in[2,\ +\infty).\end{cases}$$

1.107. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\pi\sqrt[n]{e}.$$

(Marcel Chiriţă)

Soluţie. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(n\pi\sqrt[n]{e}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(n\pi\sqrt[n]{e}-n\pi\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin n\pi\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[n]{e}\right) = \sin\pi = 0.$$

1.108. *Se dă şirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu termenul general*

$$u_n = \frac{x^n + 1}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+p-1}}$$

unde $x \in \mathbf{R}_+$, $p \in \mathbf{N}$. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} u_n = f(x)$.

Soluţie. Observăm că:

$$u_n = \begin{cases} 1 & ; \ x = 0 \\ \dfrac{2}{n+p} & , \ x = 1 \\ \dfrac{(x^n+1)(x-1)}{x^{n+p}-1}, & x \in \mathbf{R}^*_+ - \{1\} \end{cases}$$

şi atunci:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 1 & ; \ x = 0 \\ 0 & ; \ x = 1 \\ 1 - x, & x \in (0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x^p}, & x \in (1, +\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x-1}{x^p}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

1.109. *Există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît:*

$$x_{n+1} - x_n + x_n^2 = 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

şi $x_{1998} = 1$, $x_0 \in \mathbf{R}$?

(D.M. Bătineţu.

Soluție. Din:

$$x_{n+1} - x_n + x_n^2 = 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

rezultă că:

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Dacă $x_0 \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ atunci este evident că:

$$x_n(1 - x_n) \leqslant 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

ceea ce arată că $x_{n+1} \leqslant 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și deci nu este posibil ca $x_{1936} = 1$.

Dacă $x_0 \in (0, 1)$ atunci $x_n \in (0, 1)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și deci nu este posibil ca $x_{1936} = 1$. Rezultă deci că nu există șiruri cu proprietatea din enunț.

1.110. *Se dă șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit astfel:*

$$0 < a_0 < a_1 - 1, \ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că $a_{1936} > 2^{1935}$.

Soluție. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}).$$

Deci:

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) = 2^2(a_{n-1} - a_{n-2}) = \\ = \ldots = 2^n(a_1 - a_0).$$

Prin urmare:

$$a_{n+1} = a_n + 2^n(a_1 - a_0).$$

Deoarece $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_1 > a_0 > 0$ rezultă că:

$$a_{n+1} > 2^n(a_1 - a_0) > 2^n.$$

Pentru $n = 1935$ obținem $a_{1936} > 2^{1935}$.

1.111. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *șirul numerelor lui* FIBONACCI[1] *adică șirul definit astfel:*

$$f_0 = f_1 = 1, \ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

[1] Fibonacci, Leonardo da Pisa (1175–1250) — matematician italian.

Să se găsească forma termenului general f_n *al şirului şi să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} (f_n)^{\frac{1}{n+1}}$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a acestui şir liniar recurent este $x^2 - x - 1 = 0$ cu rădăcinile:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Deci:

$$f_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şi dacă impunem condiţiile iniţiale $f_0 = f_1 = 1$ obţinem:

$$f_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}).$$

Să arătăm că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n 2^{n+1}}{(\sqrt{5}+1)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Într-adevăr:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n 2^{n+1}}{(\sqrt{5}+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n)^{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{f_n 2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n 2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}}\right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1.112. *Dacă* $u_0 = 0$ *să se determine termenul general al şirului* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *unde:*

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^3}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Soluție. Avem $u_1 = \sqrt{1} = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{3}$, și prin inducție, rezultă:

$$u_n = \sqrt{n}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

1.113. *Să se exprime în funcție de* n *termenul general al șirului* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *știind că:*

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 3.$$

Soluție. Relația de recurență dată se mai scrie:

$$\Delta x_{n+1} = 2\Delta x_n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

de unde se obține că:

$$\Delta x_n = 2^n \Delta x_0 = 2^n \cdot 3, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Deci:

$$x_{k+1} - x_k = 2^k \cdot 3, \quad (\forall)\ k \in \mathbf{N}$$

de unde obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k = 3\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_{n+1} = 3(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) = 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} =$$

$$= 3(2^{n+1} - 1), \quad (\forall)\ n \in \ldots$$

1.114. *Să se exprime termenul general al șirului* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *știind că:*

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

unde $a, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Soluție. Vom determina un $y \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$x_{n+1} + y = \alpha(x_n + y), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Din relația de recurență avem $x_2 = \alpha a + \beta$ și deci $x_2 + y = \alpha(x_1 + y) \Leftrightarrow \alpha a + \beta + y = \alpha(a + y) \Leftrightarrow \alpha a + \beta + y = \alpha a + \alpha y \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ dacă $\alpha \neq 1$.

Deci, dacă $\alpha \neq 1$ atunci, notînd $a_n = x_n + y$, obținem:

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

de unde se rezultă că $a_{n+1} = \alpha^n a_1$.

Deoarece $a_1 = x_1 + y = a + \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$ obținem că:

$$a_{n+1} = \alpha^n \left(a + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right) = a\alpha^n + \frac{\beta\alpha^n}{\alpha - 1}$$

adică:

$$x_{n+1} + \frac{\beta}{\alpha - 1} = a\alpha^n + \frac{\beta\alpha^n}{\alpha - 1}$$

echivalent cu:

$$x_{n+1} = a\alpha^n + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \ x_1 = a.$$

Dacă $\alpha = 1$ atunci $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \beta$ și deci:

$$x_{n+1} = x_1 + n\beta = a + n\beta, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

1.115. *Să se exprime* a_n *în funcție de* n *unde:*

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \ a_1 = 1.$$

Soluție. Avem:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

echivalent cu:

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

și deci, notînd $b_n = a_n + 1$, obținem:

$$b_{n+1} = 2b_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \ b_1 = 2.$$

De aici rezultă că:

$$b_n = 2^n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$a_n = 2^n - 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

1.116. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *astfel încît* $a_1 = 1$ *și:*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că $a_{100} \in (14,\ 18)$.

Soluție. Ridicînd la pătrat relația de recurență obținem:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2,\quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

de unde rezultă că:

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2,\quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Din această inegalitate obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2n \Leftrightarrow a_{n+1}^2 \geqslant 2n$$

de unde pentru $n = 99$ obținem $a_{100}^2 \geqslant 198 > 14^2$ deci $a_{100} > 14$. Din:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2$$

obținem:

$$a_{n+1}^2 \leqslant a_n^2 + 3$$

de unde rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n+1}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 3n \Leftrightarrow a_{n+2}^2 \leqslant 3n$$

de unde pentru $n = 99$ obținem $a_{100}^2 \leqslant 297 < 18^2$ adică $a_{100} < 18$.

1.117. *Se definește șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel :*

$$a_1 = a_2 = 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că :

a°). *Termenii șirului sînt în progresie geometrică.*

b°). $\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n & a_{n+2} \end{vmatrix} = 4a_{3n+2},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$

Soluție. Avem:

a°). $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$

$= \frac{(1-\sqrt{5})^2}{2} = a_1^2$, $a_3 = a_2 + a_1 = a_1(a_1 + 1) = a_1 a_1^2 = a_1^3$.

Deci, prin inducție, rezultă că:

$$a_n = a_1^n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

adică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este o progresie geometrică de rație a_1 și prin termen a_1.

b°). $\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n & a_{n+2} \end{vmatrix} = a_{n+2}^3 + a_{n+1}^3 + a_n^3 -$

$- 3a_{n+2} \cdot a_{n+1} \cdot a_n = a_1^{3n+6} + a_1^{3n+3} + a_1^{3n} - 3a_1^{3n+3} =$

$= a_1^{3n}(a_1^6 - 2a_1^3 + 1) = a_1^{3n}(a_1^3 - 1)^2 = a_1^{3n}(1-\sqrt{5})^2 =$

$= a_1^{3n}(2a_1)^2 = 4a_1^{3n+2} = 4a_{3n+2}$.

1.118. *Să se determine șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ *cu proprietatea că:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2, \ (\forall),\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Această relație ne amintește de egalitățile cunoscute:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Cum relația dată este valabilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, alegem $n = 1$. Avem $a_1^3 = a_1^2$ și, cum a_1 este strict pozitiv, deducem $a_1 = 1$.

Apoi pentru $n = 2$, găsim analog $a_2 = 2$.

Presupunem că $a_n = n$; să arătăm că $a_{n+1} = n + 1$. Scriind relația din enunț pentru $n \to n + 1$ și folosind ipoteza de inducție ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$), avem:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + a_{n+1}^3 = (1 + 2 + \ldots + n + a_{n+1})^2$$

sau:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + a_{n+1}^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + n)a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

De aici deducem:

$$a_{n+1}^3 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

și, împărțind cu $a_{n+1} \neq 0$, obținem:

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n(n+1) = 0.$$

Această ecuație are o singură rădăcină pozitivă, anume $a_{n+1} = n + 1$. Deci $a_n = n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

1.119. *Există șiruri* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de numere naturale strict crescătoare astfel încît* $(\forall) m, n \in \mathbf{N}^*$ *să avem:* $a_{m \cdot n} = a_m + a_n$?

Soluție. Să presupunem că există cel puțin un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu proprietatea din enunț.
Avem:

$$a_{2^1} = a_{2 \cdot 2} = a_2 + a_2 = 2a_2, \; a_{2^2} = a_{2^1 \cdot 2} = 2a_2 + a_2 =$$

$$= 3a_2, \ldots, a_{2^n} = a_{2^{n-1} \cdot 2} = a_{2^{n-1}} + a_2 = (n-1)a_2 + a_2 =$$

$$= na_2, \; (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece șirul este strict crescător rezultă că $a_{2^n} \geqslant 2^n$ și deoarece $a_{2^n} = na_2$ rezultă că $na_2 \geqslant 2^n$.
Vom demonstra că inegalitatea $na_2 \geqslant 2^n$ nu este posibilă.
În adevăr, din $na_2 \geqslant 2^n$ rezultă că $a_2 \geqslant \frac{2^n}{n}$ ceea ce ne arată că șirul $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este mărginit superior de a_2.
Deoarece:

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} > 1, \; (\forall) n > 1$$

rezultă că șirul $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător. Fiind strict crescător și mărginit superior de a_2 rezultă că acest șir este convergent. Aceasta este o contradicție deoarece:

$$\frac{2^n}{n} = \frac{(1+1)^n}{n} = \frac{1 + n + C_n^2 + \ldots + 1}{n} > \frac{C_n^2}{n} = \frac{n-1}{2}$$

de unde rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.

Contradicția provine din presupunerea absurdă că ar exista șiruri $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietatea din enunț.

1.120*. *Considerăm șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență :* $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ *astfel ca* $x_0 = 5$. *Să se arate că :*

$$45 < x_{1000} < 45{,}1.$$

Soluție. Din enunț rezultă că:

$$\Delta x_n = \frac{1}{x_n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci va trebui să comparăm pe $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu funcția $f(x) = \sqrt{2x+c}$.

Vom căuta deci să comparăm cu $y_n = \sqrt{2n+c}$. Avem:

$$\Delta y_n = \sqrt{2n+c+2} - \sqrt{2n+c} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n+c+2} + \sqrt{2n+c}} < \frac{2}{2\sqrt{2n+c}} = \frac{1}{y_n}.$$

Funcția $g : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$ este strict crescătoare. În adevăr, $(\forall) x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, $x_1 < x_2$, avem:

$$g(x_1) - g(x_2) = (x_1 - x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) < 0$$

ceea ce este echivalent cu: $g(x_1) < g(x_2)$.

Din $c \geq 1$ rezultă $y_n \geq 1$; dacă, în plus, $x_n \geq y_n$ atunci:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geq y_n + \frac{1}{y_n} \geq y_{n+1}.$$

Deoarece $x_0 \geq y_0$ este destul că alegem $c = 25$ și atunci raționamentul nostru prin inducție ne arată că:

$$x_n \geq \sqrt{2n + 25}.$$

Pentru a obține o inegalitate de forma $x_n \leq z_n$ va trebui să alegem z_n așa încît $z_n + \frac{1}{z_n} \leq z_{n+1}$ (raționament analog).

Vom căuta $z_n = \alpha + \sqrt{2n + \beta}$, deci:

$$z_{n+1} - z_n = \sqrt{2n + 2 + \beta} - \sqrt{2n + \beta} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n + \beta + 2} + \sqrt{2n + \beta}}.$$

Inegalitatea $z_{n+1} - z_n \geq \frac{1}{z_n}$ conduce la:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n + 2 + \beta} + \sqrt{2n + \beta}\right) \leq \alpha + \sqrt{2n + \beta}$$

deci la:

$$\sqrt{2n + 2 + \beta} - \sqrt{2n + \beta} \leq 2\alpha,$$

adică: $\frac{2}{\sqrt{2n + 2 + \beta} + \sqrt{2n + \beta}} \leq 2\alpha.$

Membrul stîng este descrescător în n deci inegalitatea este asigurată de $\frac{2}{2\sqrt{\beta}} \leq 2\alpha$ deci de $\alpha \geq \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$.

Rezultatul este deci: dacă $x_0 \leq \alpha + \sqrt{\beta}$ și $\alpha \geq \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ atunci $x_n \leq \alpha + \sqrt{2n + \beta}$. Alegînd $\beta = 25$, și $\alpha = 0{,}1$ obținem:

$$\sqrt{2n + 25} \leq x_n < 0{,}1 + \sqrt{2n + 25}$$

ceea ce, pentru $n = 1\,000$, conduce la rezultatul cerut de problemă.

1.121. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_0, x_1 \in \mathbf{R}_+$,

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \ (\forall)n \geqslant 2$$

unde $b \in \mathbf{Z}_+$, *și* $a \in \mathbf{Z}_+^*$. *Să se arate că :*

1°). $x_n \geqslant x_{n-1}(a-1) + bx_0 + (a+b)x_1$, $(\forall)n \geqslant 4$;

2°). *Dacă* $x_0 = 1$ *și* $x_1 = a - 1$ *atunci :*

$y_n = (a+b)x_n + bx_{n-1}$ *este divizibil cu* $a + b - 1$, $(\forall)n \geqslant 4$.

Soluție. 1). Din relația de recurență obținem:

$$\begin{aligned} x_2 &= a \cdot x_1 + b \cdot x_0 \\ x_3 &= a \cdot x_2 + b \cdot x_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2} \end{aligned}$$

de unde, prin adunare termen cu termen, obținem:

$$\sum_{i=2}^{n} x_i = a \sum_{i=1}^{n-1} x_i + b \sum_{i=0}^{n-2} x_i$$

echivalent cu:

$$(a+b-1)\sum_{i=2}^{n-2} x_i = x_{n-1} + x_n - ax_1 - ax_{n-1} - bx_0 - bx_1 = -bx_0 - (a+b)x_1 - (a-1)x_{n-1} + x_n, \ (\forall)n \geqslant 4. \quad (1)$$

Din $a \in \mathbf{Z}_+^*$, $b \in \mathbf{Z}_+$ rezultă că $a + b - 1 \in \mathbf{Z}_+$, și dacă ținem seama că $x_0, x_1 \in \mathbf{R}_+$ atunci:

$$(a+b-1)\sum_{i=2}^{n-1} x_i \geqslant 0, \ (\forall)n \geqslant 4$$

și deci din egalitatea (1) obținem:

$$x_n \geqslant (a-1)x_{n-1} + (a+b)x_1 + b : x_0, \ (\forall)n \geqslant 4.$$

2°). Dacă în ambele părți ale relației (1) adunăm:

$$(a+b-1)(x_0 + x_1 + x_{n-1} + x_n)$$

obținem:

$$(a+b-1)\sum_{i=0}^{n} x_i = (a-1)x_0 - x_1 + bx_{n-1} + (a+b)x_n =$$

$$= a - 1 - a + 1 + bx_{n-1} + (a+b)x_n, \ (\forall)n \geqslant 4$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{y_n}{a+b-1}$$

și deoarece $\sum_{i=1}^{n} x_i \in \mathbf{Z}_+$ rezultă că y_n se divide cu $a+b-1$, $(\forall)n \geqslant 4$.

1.122. *Fie șirul* $(t_n)_n \in \mathbf{N}^*$ *astfel încît:*

$$t_{n+1} = t_{n+1} - t_n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). *Dacă* $t_1 = 0$ *și* $t_2 = 1$ *atunci:*

$$t_n = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \sin (n-1)\,60°, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). *Să se calculeze* t_n *dacă* $t_1 = a$ *și* $t_2 = b$.

(Olimpiada matematică, Olanda, 1964).

Soluție. a°). Prin inducție matematică dovedim că:

$$t_n = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\,(n-1)60°. \qquad (1)$$

Într-adevăr, $n = 1$ implică $t_1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \sin\,0° = 0$; $n = 2$ implică $t_2 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \sin\,60° = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

Dacă presupunem că pentru $n = k$ și $n = k+1$ relația (1) este adevărată, atunci:

$$t_{k+2} = t_{k+1} - t_k = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(\sin k\,60° - \sin\,(k-1)\,60°) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(\sin k\,60° - \sin k\,60° \cos 60° + \cos k\,60° \sin 60°) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(\sin\,k\,60° - \frac{1}{2}\sin k\,60° + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos k60°) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin k60° + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos k\,60°\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(\sin k60° \cdot$$

$$\cdot \cos 60° + \cos k\,60° \sin 60°) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\,(k+1)\,60°.$$

Deci formula (1) este adevărată $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

b°). Ecuația caracteristică a acestui șir este $x^2 - x + 1 = 0$ cu rădăcinile:

$$x_{1,2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}.$$

Deci:

$$t_n = A \cos n\frac{\pi}{3} + B \sin n\frac{\pi}{3}$$

de unde, ținînd seama că $t_1 = a$ și $t_2 = b$ rezultă că:

$$t_n = (a - b)\cos n\frac{\pi}{3} + \frac{a+b}{\sqrt{3}}\sin n\frac{\pi}{3}. \qquad (2)$$

Pentru $a = 0$ și $b = 1$ se obține formula punctului a°). Formula (2) se verifică și prin inducție completă.

1.123. *Fie* $M_0(x_0, y_0)$ *un punct din plan și* $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$. *Se consideră șirul* $(M_n(x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de puncte din plan cu*

$$x_n = x_{n-1}\cos\theta + y_{n-1}\sin\theta,\ y_n = x_{n-1}\sin\theta - y_{n-1}\cdot\cos\theta,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). *Să se demonstreze că dacă există* $p \in \mathbf{N}$ *astfel încît:*

$$x_p^2 + y_p^2 = r^2,\ r \in \mathbf{R}$$

atunci:

$$x_n^2 + y_n^2 = r^2,\ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

b°). *Să se arate că dacă șirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(y_n)_{n\geq 1}$ *sînt convergente atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *nu depind de punctul* $M_0(x_0, y_0)$.

Soluție. a°). Oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$x_n^2 + y_n^2 = x_{n-1}^2\cos^2\theta + y_{n-1}^2\sin^2\theta + x_{n-1}^2\sin^2\theta + y_{n-1}^2\cdot\cos^2\theta = x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2$$

și atunci, prin inducție, rezultă că:

$$x_m^2 + y_m^2 = x_n^2 + y_n^2,\ (\forall)\ m,\ n \in \mathbf{N},$$

și deci, dacă există $p \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$x_p^2 + y_p^2 = r^2$$

atunci:

$$x_n^2 + y_n^2 = r^2, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

b°). Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; atunci, trecînd la limită în relațiile de recurență obținem:

$$x = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$y = x \sin\theta - y \cos\theta$$

de unde se vede că x și y nu depind de $M_0(x_0, y_0)$.

1.124. *Fiind dat șirul* FIBONACCI $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $a_1 = a_2 = 1$ *și:*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ (\forall)\ n > 3$$

se cere relația de recurență a șirului $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$b_n = a_n^2, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Avem:

$$b_n = a_n^2 = (a_{n-1} + a_{n-2})^2 = a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + 2a_{n-2}\cdot a_{n-1} =$$
$$= b_{n-1} + b_{n-2} + \frac{(a_{n-1} + a_{n-2})^2 - (a_{n-1} - a_{n-2})^2}{2} =$$
$$= b_{n-1} + b_{n-2} + \frac{b_n - b_{n-2}}{2}$$

deci:

$$b_n = 2b_{n-1} + 2b_{n-2} - b_{n-3}, \ (\forall)\ n \geqslant 3.$$

1.125. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît:*

$$x_{2n} = \frac{(-1)^n - 6\cdot 2^{2n}}{5}, \quad x_{2n+1} = \frac{3(-1)^n + 6\cdot 2^{2n+1}}{5}$$

Să se arate că:

$$2x_p + x_{p+1} + 2x_{p+2} + x_{p+3} = 0, \ (\forall)\ p \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Dacă $p = 2n$ atunci:

$$2x_{2n} + x_{2n+1} + 2x_{2n+2} + x_{2n+3} =$$
$$= \frac{2(-1)^n - 6 \cdot 2^{n+1}}{5} + \frac{3(-1)^n + 6 \cdot 2^{2n+1}}{5} +$$
$$+ \frac{2(-1)^{n+1} - 6 \cdot 2^{2n+3}}{5} + \frac{3(-1)^{n+1} + 6 \cdot 2^{2n+3}}{5} = 0$$

iar dacă $p = 2n + 1$, atunci:

$$x_{2n+1} + 2x_{2n+1} + x_{2n+2} + 2x_{2n+3} =$$
$$= \frac{6(-1)^n + 6 \cdot 2^{2n+2}}{5} + \frac{(-1)^{n+1} - 6 \cdot 2^{2n+2}}{5} +$$
$$+ \frac{6(-1)^{n+1} + 6 \cdot 2^{2n+4}}{5} + \frac{(-1)^{n+3} - 6 \cdot 2^{2n+4}}{5} = 0.$$

Deci, pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$ avem relația dată.

1.126. *Fie șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *astfel încît* $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = 0$. *Este convergent șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$?

Soluție. Fie $x_{n+1} - x_n = \Delta(n)$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(n) = 0$.

Avem:

$$x_2 - x_1 = \Delta(1),\ x_3 - x_2 = \Delta(2),\ \ldots,\ x_{n+1} - x_n = \Delta(n)$$

și, adunîndu-le, avem:

$$x_{n+1} = x_1 + \Delta(1) + \Delta(2) + \ldots + \Delta(n)$$

și deci, dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta(i)$ și reciproc.

Avem în acest caz că:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_1 + \lim_{n\to\infty} (\Delta(1) + \Delta(2) + \ldots + \Delta(n)),\ x_1 \text{ finit.}$$

Deci dacă șirul cu termenul general:
$\Delta(1) + \Delta(2) + \ldots + \Delta(n)$ este convergent atunci șirul dat este convergent, iar dacă este divergent atunci și șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent.

Fie, de exemplu, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n}$, atunci:

$$x_{n+1} = x_1 + \left(1 + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

și cum șirul:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

este divergent, rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent.
Pentru:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2^n},$$

șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x_1 + 1$, x_1 finit.
Deci șirul poate fi convergent, dar poate fi și divergent.

1.127. *Fie* $x_1 = 1$ și:

$$x_{n+1} = \frac{(-1)^n n^2 + e^{-n}}{(-1)^n n^2}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Este șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *convergent? Dar monoton?*
Soluție. Avem:

$$x_{n+1} = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2 e^n}$$

deci:

$$|x_{n+1} - 1| = \frac{1}{e^n n^2}$$

care ne spune că șirul este convergent, avînd limita 1.
Se observă că termenii de rang par sînt mai mari ca 1 și formează un șir descrescător cu limita 1, iar termenii de rang impar formează un șir crescător mărginit superior de 1 și cu limita 1. Prin urmare șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este monoton.

1.128. *Se dau* $a_0, b_0, c_0 \in \mathbf{R}$. *Se definesc șirurile:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n);\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n);\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

pentru orice n *natural. Să se arate că șirurile* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sînt convergente către:*

$$\frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0).$$

Soluție. Adunînd cele trei relații, obținem:

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Deci:

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} =$$

$$= \ldots = a_0 + b_0 + c_0 = a$$

unde a este un număr real.

Dar $b_n + c_n = a - a_n$ de unde rezultă că:

$$2a_{n+1} = a - a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Putem scrie:

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= a - a_n, \\ 2a_n &= a - a_{n-1}, \\ 2a_{n-1} &= a - a_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_1 &= a - a_0. \end{aligned}$$

Înmulțind a doua relație cu $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a treia cu $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ etc. și ultima cu $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ și adunînd cele $n+1$ relații obținem:

$$2a_{n+1} = a\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) - a_0\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2a_{n+1} = a\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} - a_0\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Trecînd la limită obținem $2 \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{2a}{3}$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a}{3} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}.$$

La fel arătăm că și:

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}.$$

Observație. Se poate da și o soluție geometrică, alegînd într-un sistem de axe xOy punctele $A_0(a_0, x_0)$, $B_0(b_0, y_0)$ și $C_0(c_0, z_0)$ astfel încît ele să formeze un triunghi. Punctele:

$$A_1\left(\frac{b_0 + c_0}{2}, \frac{z_0 + y_0}{2}\right),\ B_1\left(\frac{a_0 + c_0}{2}, \frac{x_0 + z_0}{2}\right),$$

$$C_1\left(\frac{a_0 + b_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right).$$

formează un triunghi cu vîrfurile în mijloacele laturilor triunghiului $A_0B_0C_0$. Cele două triunghiuri au același centru de greutate.

Continuînd procedeul obținem un șir de triunghiuri $A_nB_nC_n$, care tind la limită către centrul de greutate al triunghiului $A_0B_0C_0$, adică spre punctul:

$$G\left(\frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}, \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\right).$$

1.129. *Fie* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir de numere reale astfel încît pentru orice* $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *există* $k \in \mathbf{N}^*$, *astfel încît:*

$$\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n,\ a_n = \frac{a_k}{2}.$$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soluție. Să arătăm că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ atunci:

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_1|}{n}. \qquad (1)$$

Este evident că $a_2 = \frac{a_1}{2}$; deci $|a_2| = \frac{|a_1|}{2} \leqslant \frac{|a_1|}{2}$ adică propoziția (1) este verificată pentru $n = 2$.

Să presupunem că pentru $(\forall)\ i \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant p$, propoziția (1) este adevărată adică $|a_i| \leqslant \frac{|a_1|}{i}$.

Deoarece există $i \in \mathbf{N}^*$, $\frac{p+1}{2} \leqslant i \leqslant p+1$, astfel încît $a_{p+1} = \frac{a_i}{2}$ rezultă atunci că:

$$|a_{p+1}| = \frac{|a_i|}{2} \leqslant \frac{|a_1|}{2i} \leqslant \frac{|a_1|}{p+1}.$$

Conform concluziei principiului inducției complete rezultă că propoziția (1) este adevărată $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Din (1) rezultă:

$$0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{|a_1|}{n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

și deci, prin trecere la limită, avem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |a_n| \leqslant 0$$

sau $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.130. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît* $a_0 = 1$ *și:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10} a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

a°). *Să se scrie termenii următori sub formă zecimală:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6.$$

b°). *Să se exprime* a_n *în funcție de* n.

c°). *Cum putem găsi valoarea produsului* $1{,}21 \times 1{,}331$ *fără a mai face noi calcule?*

(Bacalaureat, Franța 1972).

Soluție. a°). Avem:

$$a_{n+1} = \frac{11}{10} a_n,\ (\forall) n \in \mathbf{N},$$

deci:

$$a_1 = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$a_2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11^2}{10^2} = 1{,}21,\quad a_3 = 1{,}331;$$

$$a_4 = \frac{11^4}{10^4} = 1{,}4641,\quad a_5 = \frac{11^5}{10^5} = 1{,}61051,\quad a_6 = 1{,}771561$$

b°). Din relația de recurență avem:

$$a_{n+1} = \frac{11}{10} a_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare:

$$a_1 = \frac{11}{10} a_0,$$

$$a_2 = \frac{11}{10} a_1,$$

$$a_3 = \frac{11}{10} a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{11}{10} a_{n-1}$$

Prin înmulțire rezultă:

$$a_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n a_0 = \left(\frac{11}{10}\right)^n.$$

c°). Avem:

$$1{,}21 \times 1{,}331 = \frac{11^2}{10^2} \times \frac{11^3}{10^3} = \frac{11^5}{10^5} = a_5 = 1{,}61051.$$

1.131.* *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_8 \in \mathbf{R}$, *cu proprietatea că* $\sum_{i=1}^{8} a_i^2 \neq 0$ *și* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *un șir definit astfel:*

$$x_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Știind că o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *sînt nuli să se determine toți termenii nuli ai șirului* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

(Olimpiada internațională de matematică, 1967).

Soluție. Renumerotînd numerele a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ putem presupune că:

$$|a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \geq |a_8|.$$

Este evident că $|a_1| > 0$ deoarece $\sum_{i=1}^{8} a_i^2 \neq 0$ și că:

$$x_{2n} = a_1^{2n} + a_2^{2n} + \ldots + a_8^{2n} > 0, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci, termenii nuli ai șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt printre termenii subșirului $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Dacă $|a_1| > |a_2|$, atunci:

$$0 < b = \frac{|a_2|}{|a_1|} < 1$$

și deci:

$$|a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n| \leqslant |a_2^n| + |a_3^n| + \ldots + |a_8^n| < 7b^n |a_1|^n$$

și, prin urmare:

$$|x_n| \geqslant |a_1^n| - |a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n| > |a_1^n| (1 - 7b^n) > 0$$

dacă $1 - 7b^n > 0$ adică:

$$n \geqslant m = \left[\frac{\ln 7}{-\ln b}\right]_*.$$

Deoarece o infinitate de termeni ai șirului sînt nuli, rezultă că inegalitatea (1) este imposibilă și deci presupunerea că $|a_1| > |a_2|$ este absurdă. Rezultă atunci că $|a_1| = |a_2|$ și sînt de analizat două situații:

$a_1 = a_2$. În acest caz, notînd $c = \frac{|a_3|}{|a_2|}$, obținem ca mai sus că:

$$|x_n| \geqslant |a_1|^n (2 - 6c^n), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și deci raționînd ca mai sus, deducem $|a_2| = |a_3|$ și continuînd în același mod rezultă că:

$$|a_1| = |a_2| = \ldots = |a_8|$$

deci:

$$x_{2n} = 8a_1^{2n} \text{ și}$$

$$x_{2n-1} = k a_1^{2n-1}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

unde $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Cum o infinitate de termeni ai șirului sînt nuli, din:

$$x_{2n-1} = k a_1^{2n-1}$$

rezultă că $a_1 = 0$ și deci $a_i = 0$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots 8\}$, ceea ce este în contradicție cu $|a_1| > 0$.

Această contradicție provine din faptul că am admis că din $|a_1| = |a_2|$ rezultă $a_1 = a_2$.

Prin urmare $|a_1| = |a_2|$ implică $a_1 = -a_2$. Analog obținem că: $a_3 = -a_4$, $a_5 = -a_6$, $a_7 = -a_8$ și atunci rezultă că:

$$x_{2n} \neq 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*, \ x_{2n+1} = 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

1.132*. *Să se determine* $x \in \mathbf{R}$ *astfel încît* $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *să avem:*

$$9 \cdot 2^{4n-4} x^2 - 3 \cdot 2^{n-1}(2^{n+2} - 1)x + (2^{4n+1} - 2^{2n} - 1) < 0.$$

(C.N. Tudor, G.M.B., 7468).

Soluție. Rezolvăm ecuația:

$$9 \cdot 2^{4n-4} x^2 - 3 \cdot 2^{n-1}(2^{n+2} - 1)x + (2^{4n+1} - 2^{2n} - 1) = 0$$

al cărui discriminant este:

$$\Delta_n = (3 \cdot 2^{n-2}(2^{n+2} - 1))^2 - 9 \cdot 2^{4n-4}(2^{4n+1} - 2^{2n} - 1) =$$

$$= 9^2 \cdot 2^{4n-4} > 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$x_{1,2} = \frac{3 \cdot 2^{n-2}(2^{n+2} - 1) \pm 9 \cdot 2^{2n-2}}{9 \cdot 2^{4n-4}}$$

adică:

$$x_{1,n} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3 \cdot 2^{2n}}, \ x_{2,n} = \frac{2^{2n+1} + 1}{3 \cdot 2^{2n}}.$$

Pentru ca inegalitatea din enunț să fie satisfăcută trebuie ca:

$$x_{1,n} < x < x_{2,n}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{2^{2n+1} - 2}{3 \cdot 2^{2n}} < x < \frac{2^{2n+1} + 1}{3 \cdot 2^{2n}}, \ (\forall) \ n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin trecere la limită după $n \in \mathbf{N}^*$ obținem:

$$\lim_{n \to \infty} x_{1,n} = \frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} = \lim_{n \to \infty} x_{2,n}.$$

Deci, $x = \frac{2}{3}$.

1.133*. *Numim* d — *vecinătate a unui punct* $a \in \mathbf{R}$ *orice interval de forma* $[\alpha, \beta)$ *cu* $a \in [\alpha, \beta)$. *Şirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *este* d — *convergent către* $a \Leftrightarrow$ *complementara, oricărei* d — *vecinătăţi a lui* a *conţine un număr finit de termeni ai şirului şi folosim notaţia* $d * \lim_{n \to \infty} a_n = a$.

a°). *Să se dea o condiţie necesară şi suficientă pentru* d — *convergenţa unui şir, analoagă condiţiei:*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

b°). *Să se examineze* d — *convergenţa şi convergenţa şirurilor de termeni generali* $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$.

c°). *Să se formuleze o proprietate care să lege cele două noţiuni.*

Soluţie. a°). Condiţia cerută este:

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant a_n - a < \varepsilon. \qquad (1)$$

Pentru demonstraţie observăm echivalenţele:

$$(1) \Leftrightarrow a \leqslant a_n < a + \varepsilon, \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow a_n \in [a, \ a + \varepsilon), \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon. \qquad (2)$$

Presupunem că $d * \lim_{n \to \infty} a_n = a$, rezultă atunci că în afara d — vecinătăţii $[a, a + \varepsilon)$ se află cel mult termenii $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$. Condiţia (1) este verificată dacă luăm,

$$n_\varepsilon = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} a_{n_i}.$$

Reciproc, dacă avem (1) atunci este suficient să observăm că în orice d — vecinătate $[\alpha, \beta)$ a lui a există o d — vecinătate $[a, a + \varepsilon)$ (de exemplu, aceea pentru care $\varepsilon = \beta - a$) şi atunci, aplicînd (1) pentru acest ε, găsim că în complementara lui $[\alpha, \beta)$ se află cel mult termenii $a_1, a_1, \ldots, a_{n_\varepsilon}$ care sînt în număr finit.

b°). Avem că $d * \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ deoarece $0 \leqslant \frac{1}{n} - 0 < 0 + \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_* + 1$. Dar $d * \lim_{n \to \infty} b_n$ nu există deoarece dacă ea ar exista aceasta ar putea fi numai 0.

Dar 0 nu este $d * \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ deoarece d — vecinătățile de forma $[0, \beta)$ nu conțin nici un termen din șir.

c°). Orice șir d — convergent este convergent (se verifică imediat, dar reciproca nu este adevărată după cum am văzut mai sus: $d * \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ nu există, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

Acest lucru se poate exprima și astfel: „dacă notăm cu $\mathfrak{d}_R$ mulțimea șirurilor d — convergente și cu $\mathcal{C}_R$ mulțimea șirurilor convergente atunci $\mathfrak{d}_R \subset \mathcal{C}$."

1.134. *Se consideră matricile:*

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\quad A_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},\quad A_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

a°). *Dacă definiția progresiei geometrice o extindem și la matricile pătratice să se arate că* A_1, A_2, A_3 *se poate considera ca o progresie geometrică în două moduri.*

b°). *În fiecare din cazuri să se determine* A_n.

c°). $A_1A_3 \neq A_2$. *De ce?*

Soluție. a°) Deoarece înmulțirea matricilor nu este comutativă rezultă că A_1, A_2, A_3 se poate considera progresie geometrică în două moduri și anume:

1°). $(\exists)\ R = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$ astfel încît:

$$A_2 = A_1 \cdot R,\ A_3 = A_2 \cdot R;$$

2°). $(\exists)\ S = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & \omega \end{Vmatrix}$ astfel încît

$$S \cdot A_1 = A_2,\ S \cdot A_2 = A_3.$$

b°). 1°). În acest caz:

$$R = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ R^n = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

deci:

$$A_n = A_1 \cdot R^{n-1} = A_1 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2n-3 \\ 0 & n-1 \end{Vmatrix}$$

2°). În acest caz:

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad S^n = \begin{Vmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{Vmatrix},$$

deci:

$$A_n = S^{n-1} \cdot A_1 = \begin{Vmatrix} 3-2n & 4n-4 \\ -n+1 & 2n-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2 & 2n-3 \\ 1 & n-1 \end{Vmatrix}.$$

c°). $A_1 A_3 \neq A_2^2$ deoarece înmulțirea matricilor nu este comutativă.

1.135. *Dacă* $x_1 = \sqrt{2 + 2\cos a}$, $a \in (0, \pi)$ *și*

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} x_n.$$

Soluție. Plecăm de la egalitatea:

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad (\forall) \ x \in (0, \pi).$$

Prin ipoteză, $a \in (0, \pi)$ deci:

$$\cos \frac{a}{2^n} > 0, \quad (\forall) \ n \geqslant 1$$

și deci:

$$\sqrt{1 + \cos \frac{a}{2^{n-1}}} = \sqrt{2} \cos \frac{a}{2^n}, \quad (\forall) \ n \geqslant 1.$$

Atunci:

$$x_1 = \sqrt{2(1 + \cos a)} = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{a}{2} = 2\cos\frac{a}{2},$$

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{a}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{a}{2^2} = 2\cos\frac{a}{2^2}.$$

Dacă $x_i = 2\cos\frac{a}{2^i}$ atunci:

$$x_{i+1} = \sqrt{2 + x_i} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{a}{2^i}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{a}{2^{i+1}} = 2\cos\frac{a}{2^{i+1}}.$$

Prin urmare, în virtutea principiului inducției complete:

$$x_n = 2\cos\frac{a}{2^n}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Însă:

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

și deci:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} 2\cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}\cdot\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin a}{a}.$$

1.136. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *unde*

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Soluție. Deoarece:

$$0 < x_{n+1} < x_n < 1, \ (\forall)\, n > 1$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există. Să calculăm această limită.

Evident avem:

$$1 - \frac{1}{C_{k+1}^2} = 1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

deci:

$$x_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{C_{k+1}^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\cdot\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

1.137. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i!\ e^i}{i^i}.$$

Soluție. Notînd $u_n = \frac{n!\ e^n}{n^n}$ avem:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)!\ e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} - \frac{n!\ e^n}{n^n} =$$

$$= \frac{n!\ e^n}{(n+1)^n}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) > 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Dar $u_1 = \frac{1!}{1^1}e = e$ și deci:

$$u_n > e, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i!\ e^i}{i^i} = \sum_{n=1}^{n} u_i > n\,e$$

de unde rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i!\, c^i}{i^i} = +\infty.$$

1.138. *Să se arate că șirurile* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu:*

$$a_n = \frac{1}{k}(b + a_n^2),\ a_1 = r,$$

unde $0 \leq b \leq \frac{k^2}{4}$ *și* $k > 0$, *au aceeași limită pentru un* b *dat și orice:*

$$r \in \left[0, \frac{k + \sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right].$$

Soluție. Se observă că $a_n \geq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Să studiem diferența:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{k}(r^2 - kr + b).$$

Deosebim două cazuri:

a°). Fie $r \in \left[0, \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right]$. Atunci $a_1 \leq a_2$.

Presupunem prin inducție că:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n.$$

Trebuie să arătăm că $a_n \leq a_{n+1}$; avem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{k}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci șirul este crescător. Să arătăm că el este și mărginit. Avem:

$$a_1 = r \leq \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

Presupunem prin inducție că:

$$a_n \leq \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}$$

adică:

$$a_n^2 \leqslant \frac{k^2 - 2b - k\sqrt{k^2 - 4b}}{2}$$

și atunci:

$$a_{n+1} = \frac{1}{k}(b + a_n^2) \leqslant \frac{1}{k}\left(b + \frac{k^2 - 2b - k\sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right) =$$

$$= \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

Deci, în acest caz, șirul este convergent și, trecînd la limită în relația de recurență, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

ω°). Fie $r \in \left[\frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}, \frac{k + \sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right]$.

În acest caz, $a_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Se observă imediat că $a_2 < a_1$ și deci, presupunînd că $r = a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n$, vom demonstra că $a_n > a_{n+1}$.

Avem:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{k}(a_{n-1} - a_n)(a_{n-1} + a_n) > 0$$

deci șirul dat este strict descrescător în acest caz și, fiind și mărginit inferior de zero, rezultă că este convergent și deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

1.139. *Să se calculeze limita șirului* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *dacă:*

$$a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n};\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluție. Deoarece $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avem:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

deci:

$$a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!\,(n-k)}{n!}.$$

Evident însă, pentru $(\forall)\ x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ avem:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_{m-k}$$

deci:

$$a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!\,k!\,(k+1)}{n!}$$

şi deci:

$$2a_n = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!\,((n-k)+(k+1))}{n!} =$$

$$= 2 + \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!} = 2 + \frac{n+1}{n} \cdot a_{n-1}$$

adică:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_{n-1},\ (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Prin inducţie relativ la n deducem imediat că:

$$2 \leqslant a_n \leqslant 2 + \frac{4}{n},\ (\forall)\ n \geqslant 2$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există şi este egală cu 2.

1.140. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,\ a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Avem:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}\right)^{\frac{n}{2}(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2)}$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2)}{2}} = x,$$

și totodată:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)n + \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{b}-1)n =$$

$$= \ln a + \ln b = \ln ab.$$

Prin urmare:

$$x = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}.$$

1.141. *Dacă:*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluție. Prin inducție matematică se demonstrează identitatea lui CATALAN[1]:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Deci:

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}-\ln 2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2$$

[1] Catalan, E. Ch., (1814–1894) – matematician belgian.

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$$

rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C - C + \ln 2 = \ln 2.$$

1.142. *Să se calculeze limita șirului de termen general:*

$$a_n=\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{1936}+1}+\frac{1}{n^{1936}+2}+\ldots+\frac{1}{n^{1978}}\right),\ n\in\mathbf{N}^*-\{1\}.$$

Soluție. Notînd $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ și ținînd seama că:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-\ln n)=C \text{ (constanta lui EULER)}$$

rezultă că $(\exists)\ (d_n)_{n\geq 2}$ astfel încît:

$$b_n = C + \ln n + d_n$$

și $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Deci:

$$a_n=\frac{1}{\ln n}(C+\ln n^{1978}+d_{n^{1978}}-C-\ln n^{1936}-d_{n^{1936}}=$$

$$=\frac{1}{\ln n}(42\ln n+d_{n^{1978}}-d_{n^{1936}})=42+\frac{d_{n^{1978}}-d_{n^{1936}}}{\ln n}$$

de unde prin trecere la limită obținem $\lim_{n\to\infty} a_n = 42$.

1.143. *Dacă* $a\in\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ *să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+(1-a)^n)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Soluție. Deoarece $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ atunci $1 - a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ și deci:

$$(a^n + (1-a)^n)^{\frac{1}{n-1}} = a^{\frac{n}{n-1}} \left(1 + \left(\frac{1-a}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$= a^{\frac{n}{n-1}} \left(\left(1 + \left(\frac{1-a}{a}\right)^n\right)^{\left(\frac{a}{1-a}\right)^n}\right)^{\left(\frac{1-a}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{n-1}}$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + (1-a)^n)^{\frac{1}{n-1}} = a \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-a}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{n-1}} =$$

$$= a \cdot e^0 = a.$$

1.144. *Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n!)^2 (n+1)}}{n^2}.$$

Soluție. Folosind identitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și făcînd în inegalitatea:

$$A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant G\,(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$a_i = i\,(i+1)$, obținem:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \geqslant n\sqrt[n]{(n!)^2 (n+1)}$$

echivalent cu:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3} \geqslant \sqrt[n]{(n!)^2 (n+1)}$$

deci:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3n^3} \geqslant \frac{\sqrt[n]{(n!)^2 (n+1)}}{n^2}$$

de unde:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n!)^2(n+1)}}{n^3} = 0.$$

1.145. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n,\ a,\ b \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right)^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}} = e^{\frac{1}{a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-1)} =$$

$$= e^{\frac{1}{a}\cdot\ln b} = (e^{\ln b})^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{a}}.$$

1.146. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *unde:*

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^p + \left(a+\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(a+\frac{n+k}{n}\right)^p\right).$$

$$a \in \mathbf{R},\ p,\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Folosind formula binomului lui NEWTON, evident avem:

$$nx_n = \left(a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{1}{n} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + C_p^p\cdot\frac{1}{n^p}\right) +$$

$$+ \left(a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{2}{n} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{2^2}{n^2} + \ldots + C_p^p\cdot\frac{2^p}{n^p}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{n+k}{n} + C_p^2 a^{p-2}\frac{(n+k)^2}{n^2} + \ldots + C_p^p\cdot\frac{(n+k)^p}{n^p}\right) =$$

$$= (n+k)a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{1+2+\ldots+(n+k)}{n} +$$

$$+ C_p^2\cdot a^{p-2}\cdot\frac{1^2+2^2+\ldots+(n+k)^2}{n^2} + \ldots +$$

$$+ C_p^p\cdot\frac{1^p+2^p+\ldots+(n+k)^p}{n^p}$$

deci:

$$x_n = \frac{n+k}{n} a^p + C_p^1 a^{p-1} \frac{(n+k)^2}{n^2} \cdot \frac{1+2+\ldots+(n+k)}{(n+k)^2} +$$

$$+ C_p^2 a^{p-2} \cdot \frac{(n+k)^3}{n^3} \cdot \frac{1^2+2^2+\ldots+(n+k)^2}{(n+k)^3} + \ldots +$$

$$+ C_p^p \frac{(n+k)^{p+1}}{n^{p+1}} \cdot \frac{1^p+2^p+\ldots+(n+k)^p}{(n+k)^{p+1}}.$$

Ţinînd seama că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+k)^\alpha}{(n+k)^{\alpha+1}} = \frac{1}{1+\alpha}, \quad (\forall)\ \alpha > 0$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a^p + \frac{1}{2} \cdot C_p^1 a^{p-1} + \frac{1}{3} \cdot C_p^2 a^{p-2} + \ldots + \frac{1}{p+1} C_p^p.$$

1.147. *Se consideră şirul de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *crescător, divergent şi* $a_n \geq 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. *Pentru* $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ *fie* $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *soluţia ecuaţiei:*

$$2(2a_n + 4)\cos^2 x + 3\cos x + 1 - a_n = 0.$$

Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este descrescător şi mărginit şi să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie. Pentru $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ avem $a_n \geq 1$ şi deci:

$$0 \leq \frac{a_n - 1}{2a_n + 1} < \frac{1}{2}$$

deci există $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ soluţie a ecuaţiei trigonometrice din enunţ şi avem:

$$\cos x_n = \frac{a_n - 1}{2a_n + 1} = u_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton crescător. Într-adevăr:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a_{n+1}-1}{2a_{n+1}+1} - \frac{a_n-1}{2a_n+1} =$$

$$= \frac{2a_na_{n+1} - 2a_n + a_{n+1} - 1 - 2a_na_{n+1} - a_n + 1}{(2a_n+1)(2a_{n+1}+1)} =$$

$$= \frac{3(a_{n+1}-a_n)}{(2a_{n+1}+1)(2a_n+1)} \geqslant 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece:

$$u_n = \cos x_n = \frac{a_n - 1}{2a_n + 1}$$

atunci $0 \leqslant u_n < \frac{1}{2}$, deci șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton și mărginit adică este convergent. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 1}{2a_n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{a_n}}{2 + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{2}.$$

Funcția $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$ fiind strict descrescătoare, din faptul că șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător, rezultă că șirul $x_n = \arccos u_n$ este descrescător și mărginit de $\frac{\pi}{3}$. Deci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \arccos \lim_{n\to\infty} u_n = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

1.148*. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geqslant 2}$ *unde:*

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n]{n}}}$$

este convergent.

Soluție. Evident:

$$x_n < x_{n+1}, \quad (\forall)\ n \geqslant 2,$$

deoarece:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n + \sqrt[n+1]{n+1}}$$

rezultă că șirul $(x_n)_{n\geqslant 2}$ este strict crescător. Cum:

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots \geqslant n + 2$$

rezultă că:

$$\sqrt[n]{n+2} \leqslant 2, \ (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Atunci:

$$x_n \leqslant \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{(n-1)+2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-2]{(n-2)+2}}} \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2 + \sqrt[3]{3+2}} \leqslant 2,$$

deci $(x_n)_{n\geqslant 2}$ este majorat de numărul 2.

Prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 2}$ este convergent.

1.149. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ *considerăm șirul* $a_n(x)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu* $a_n(x) = [x_n]_*^{\frac{1}{n}}$ *unde* $[y]_*$ *înseamnă pentru orice* $y \in \mathbf{R}_+$, *partea întreagă a numărului* y. *Să se demonstreze că pentru fiecare* $x \in \mathbf{R}_+$, *șirul* $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$.

Soluție. Dacă $x \in [0, 1)$ atunci $x^n \in [0, 1)$ și $[x^n]_* = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ adică $a_n(x) = 0^{\frac{1}{n}} = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Prin urmare, în acest caz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0, \ (\forall)\ x \in [0, 1).$$

Dacă $x = 1$ atunci $x^n = 1$ deci $[x^n]_* = 1$ adică $a_n(1) = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1) = 1$.

Pentru $x \in (1, +\infty)$ avem:

$$x^n - 1 < [x^n]_* \leqslant x^n$$

deci:

$$(x^n - 1)^{\frac{1}{n}} < a_n(x) \leqslant x, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \qquad (1)$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} (x^n - 1)^{\frac{1}{n}} = x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n_x}\right)^{-x^n}\right)^{\frac{-1}{n\cdot x^n}} = x \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n\cdot x^n}} = x \cdot e^0 = x,$$

rezultă din (1) că șirul $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = x, \ (\forall)\ x \in (1, +\infty).$$

1.150. *Se consideră șirul cu termenul general:*

$$a_n = ln\ (1 + n) + a\ ln\ (2 + n) + b\ ln\ (3 + n),$$
$$n \in \mathbf{N}^*,\ a, b \in \mathbf{R}.$$

a°). *Să se determine relația între* a *și* b *astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b°). *Dacă* $a + b + 1 = 0$ *să se determine* a *și* b *astfel încît șirul* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu termenul general* $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *să fie convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(Admitere, Institutul Politehnic București, 1972).

Soluție. a°). Avem:

$$a_n = \ln (1 + n)\ (2 + n)^a\ (3 + n)^b =$$

$$= \ln n^{1+a+b} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)^a \left(1 + \frac{3}{n}\right)^b =$$

$$= \ln n^{1+a+b} + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)^a \left(1 + \frac{3}{n}\right)^b =$$

$$= (1 + a + b) \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^a \left(1 + \frac{3}{n}\right)^b.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b = 0$$

și $\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu poate avea limita nulă decît dacă $1 + a + b = 0$.

b°). Avem:

$$b_n = \ln 2 + a\ln 3 + b\ln 4 + \ln 3 + a\ln 4 + b\ln 5 +$$
$$+ \ln 4 + a\ln 5 + b\ln 6 + \ldots + \ln(n-1) + a\ln n +$$
$$+ b\ln(n+1) + \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) +$$
$$+ \ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3).$$

și dacă ținem seama că $1 + a + b = 0$ rezultă că:

$$b_n = \ln 2 + (a+1)\ln 3 + \ln(2+n)^{a+b}(3+n)^b =$$
$$= \ln 2 + (a+1)\ln 3 + \ln n^{a+2b}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{a+b}\left(1+\frac{3}{n}\right)^b =$$
$$= \ln 2 + (a+1)\ln 3 + (a+2b)\ln n +$$
$$+ \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{a+b} \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^b.$$

De aici se observă că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent numai dacă $a + 2b = 0$. Din $a + b + 1 = 0$ și $a + 2b = 0$ rezultă că $a = -2$, $b = 1$. Prin urmare, în acest caz:

$$b_n = \ln\frac{2}{3} + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

deci $\lim_{n\to\infty} b_n = \ln\frac{2}{3}$.

1.151*. *Să se demonstreze că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *unde:*

$$x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}$$

este convergent.

Soluție. Avem:

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{1}}} > \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{1}}}} > \sqrt{n-1+\sqrt{n}}, \ldots$$

Deci:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{1}}}}} > \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}} = a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce arată că șirul dat este strict crescător.

Mai departe, vom ține seama că:

$$\sqrt{b} \leqslant \frac{1+b}{2}, \ (\forall)\ b \in \mathbf{R}_+ \quad \text{și deci:}$$

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}{2} =$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{1+2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}{4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1+3+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{n}}}{8} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1+4+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{n}}}{16} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{5+\ldots+\sqrt{n}}}{16} \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{1+(n-1)+\sqrt{n}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n}.$$

Prin urmare:

$$a_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

Dar:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1,$$

iar:

$$\frac{i}{2^i} < \left(\frac{3}{4}\right)^i < \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots < \frac{\frac{3}{4}}{1 - 3/4} = 3,$$

și rezultă că $a_n < 1 + 3 = 4$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$ adică șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este mărginit superior. Fiind strict crescător și mărginit superior, este convergent.

1.152. *Fie* $(a_n)_{n \geqslant 1}$, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *două șiruri de numere pozitive legate prin relațiile:*

$$x_1 = \sqrt{a_1},\ x_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}},\ \ldots,\ x_n =$$

$$= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}} \ldots$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *are limită.*

Soluție. Evident, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător și:

$$x_n > \sqrt{a_n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). Dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este nemărginit atunci $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este nemărginit, deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

b°). Dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este mărginit, $(\exists)$ $a > 0$, a. î. $a_n \leqslant a$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Atunci:

$$0 < x_n \leqslant \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

deci $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este mărginit și deci convergent.

1.153. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$x_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n},\quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

este convergent și să i se calculeze limita.

Soluție. Cum:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\right):\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} < 1$$

deducem că:

$$\frac{1}{2} = x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots > 0$$

deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există și $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$.

Evident însă:

$$x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},\quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1154. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît:*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} ln\left(2\cos\frac{a}{2^i} - 1\right)$$

unde $a \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Pornim de la identitatea trigonometrică:

$$2\cos a - 1 = \frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1}$$

și obținem:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{2\cos\frac{a}{2^{i-1}} + 1}{2\cos\frac{a}{2^i} + 1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(2\cos\frac{a}{2^{i-1}} + 1\right) - \right.$$

$$\left. - \ln\left(2\cos\frac{a}{2^i} + 1\right)\right) = \ln(2\cos a + 1) - \ln\left(2\cos\frac{a}{2^n} + 1\right).$$

De aici obținem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln(2\cos a + 1) - \ln 3 = \ln\frac{2\cos a + 1}{3}.$$

1.155. *Se consideră șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k\cdot(k+1)}.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Soluție. Avem:

$$2(n+1)\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,(k+1)!} -$$

$$- 1 = -1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^{k+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} = -(1-2)^{n+1} = (-1)^n$$

de unde obținem:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+(-1)^n}{n+1} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k,\ k \in \mathbf{N} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{dacă } n = 2k+1),\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

deci $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1.156. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\geq 2}$ *unde:*

$$x_n = n^k\left(\sqrt[n^k]{a} - \sqrt[n^m]{b}\right)$$

cu $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $k, m \in \mathbf{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Avem:

$$x_n = n^k\left(\sqrt[n^k]{a} - 1 + 1 - \sqrt[n^m]{b}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[n^k]{a} - 1}{\frac{1}{n^k}} - \frac{\sqrt[n^m]{b} - 1}{\frac{1}{n^k}} = \frac{a^{\frac{1}{n^k}} - 1}{\frac{1}{n^k}} - \frac{b^{\frac{1}{n^m}} - 1}{\frac{1}{n^m}} \cdot \frac{n^k}{n^m}.$$

Prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n^k}} - 1}{\frac{1}{n^k}} - \lim_{n\to\infty} \frac{b^{\frac{1}{n^m}} - 1}{\frac{1}{n^m}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{k-m} =$$

$$= \begin{cases} \ln a & \text{dacă } m > k \\ \ln a - \ln b & \text{dacă } m = k \\ +\infty & \text{dacă } m < k,\ b \in (0, 1) \\ -\infty & \text{dacă } m < k \text{ și } b \in (1, +\infty) \\ \ln a & \text{dacă } m < k \text{ și } b = 1. \end{cases}$$

1.157*. *Folosind faptul că:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

să se demonstreze că dacă notăm:

$$u = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right),$$

$$v = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}\right),$$

$$w = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\right) \text{ atunci i}$$

$$u^3 + v^3 + w^3 = 1 + 3uvw.$$

Soluție. Pornim de la identitatea:

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = u(u + \omega v + \omega^2 w)(u + \omega^2 v + \omega w) + v(v + \omega w + \omega^2 u)(v + \omega^2 w + \omega u) + w(w + \omega u + \omega^2 v) \cdot (w + \omega^2 u + \omega v), \ (\forall)\ u, v, w \in \mathbf{R}$$

unde ω și ω^2 sînt rădăcinile cubice complexe ale unității diferite de 1.

Observăm însă că:

$$u + v + w = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right) = e^x,$$

$$u + \omega v + \omega^2 w = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\omega x}{1!} + \frac{\omega^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^{3n} x^{3n}}{(3n)!}\right) = e^{\omega x},$$

$$u + \omega^2 v + \omega w = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\omega^2 x}{1!} + \frac{\omega^4 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^{6n} x^{3n}}{(3n)!}\right) = e^{\omega^2 x}.$$

$$v + \omega w + \omega^2 u = \omega^2 e^{\omega x},$$

$$v + \omega^2 w + \omega u = \omega e^{\omega^2 x},$$

$$w + \omega u + \omega^2 v = \omega e^{\omega x},$$

$$w + \omega^2 u + \omega v = \omega^2 e^{\omega^2 x}.$$

Deci:

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = u\,e^{\omega x} + e^{\omega^2 x} + v\omega^3 e^{\omega x} \cdot e^{\omega^2 x} + w\omega^3 e^{\omega x} \cdot e^{\omega^2 x} = (u + v + w)\ e^{\omega x + \omega^2 x} =$$

$$= e^{x + \omega x + \omega^2 x} = e^{(1+\omega+\omega^2)x} = e^{0 \cdot x} = e^0 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw + 1.$$

1.158. *Fie funcția* $f: \mathbf{R} \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ *unde:*

$$f(x) = \frac{(C_{n+2}^{n+1})^{x-a} - (C_{n+1}^{n})^{x-a}}{e^x - e^a}.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \lim_{x\to a} f(x)\right)$$

Soluție. Avem:

$$f(x) = \frac{(C_{n+2}^1)^{x-a} - (C_{n+1}^1)^{x-a}}{e^x - e^a} = \frac{1}{e^a} \cdot \frac{x-a}{e^{x-a}-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n+2)^{x-a} - (n+1)^{x-a}}{x-a} = \frac{1}{e^a} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \cdot \frac{(n+2)^y - (n+1)^y}{y}$$

unde $y = x - a$. De aici:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{e^a} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \left(\frac{(n+2)^y - 1}{y} - \frac{(n+1)^y - 1}{y} \right) =$$

$$= \frac{1}{e^a} \cdot 1 \cdot (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = e^{-a} \ln \frac{n+2}{n+1}.$$

Deci:

$$u_n = n \lim_{x \to a} f(x) = e^{-a} \cdot n \cdot \ln \frac{n+2}{n+1} = e^{-a} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n =$$

$$= e^{-a} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

și, prin urmare:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = e^{-a} \ln e = e^{-a}.$$

1.159. *Fie* $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *un șir definit astfel:*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x}{x_n} \right), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

unde $x_0, x \in \mathbf{R}_+^*$.

a)°. *Să se arate că șirul este monoton și mărginit.*

b°). *Să se calculeze termenul general al șirului în funcție de* x_0 *și* x.

c°). *Să se calculeze limita șirului.*

Soluție. a°). Se observă că dacă $x_0 > 0$, atunci $x_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

De asemenea:

$$x_n - \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{x}{x_{n-1}} \right) - \sqrt{x} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{x})^2}{2x_{n-1}} \geqslant 0$$

deci:

$$x_n \geqslant \sqrt{x}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

De aici rezultă:

$$\frac{x_{n+1}+\sqrt{x}}{x_n+\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{x}{x_n}\right)+\sqrt{x}}{x_n+\sqrt{x}}=\frac{(x_n+\sqrt{x})^2}{2x_n(x_n+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x_n+\sqrt{x}}{2x_n}<1.$$

Deci:

$$\frac{x_{n+1}+\sqrt{x}}{x_n+\sqrt{x}}\leqslant 1$$

echivalent cu:

$$x_{n+1}\leqslant x_n,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Rezultă că șirul este descrescător, mărginit inferior de $\sqrt{x}$ și mărginit superior de x_0 sau x_1, după cum $x_0\geqslant x_1$ sau $x_0\leqslant x_1$.

b'). Se observă ușor că:

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{x}}{x_{k+1}+\sqrt{x}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{x}}{x_k+\sqrt{x}}\right)^2.$$

Făcînd aici $k\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$ obținem:

$$\frac{x_1-\sqrt{x}}{x_1+\sqrt{x}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{x}}{x_0+\sqrt{x}}\right)^2;\quad \frac{x_2-\sqrt{x}}{x_2+\sqrt{x}}=\left(\frac{x_1-\sqrt{x}}{x_1+\sqrt{x}}\right)^2;\ \ldots;$$

$$\frac{x_n-\sqrt{x}}{x_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{x}}{x_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2;$$

de unde:

$$\frac{x_n-\sqrt{x}}{x_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{x}}{x_0+\sqrt{x}}\right)^{2^n}$$

deci:

$$x_n=\sqrt{x}\cdot\frac{(x_0-\sqrt{x})^{2^n}+(x_0+\sqrt{x})^{2^n}}{(x_0-\sqrt{x})^{2^n}-(x_0+\sqrt{x})^{2^n}}.$$

c^2). Trecînd la limită în relația de recurență obținem:

$$2(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{x}.$$

1.160. *În mulțimea matricilor de tipul (2, 3) fie șirul* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît:*

$$2A_{n+2} = A_{n+1} + A_n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} A_n$ *știind că:*

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ și } A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 8 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}$$

(D.M. Bătinețu).

Soluție. Relația de recurență a șirului de matrici este adevărată pentru fiecare din cele șase șiruri formate cu elementele corespunzătoare ale matricilor.

Ecuația caracteristică a acestei relații de recurență este:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ și deci:

$$A_n = U + \left(\frac{-1}{2}\right)^n V, \tag{1}$$

unde U și V sînt matrici de tipul (2, 3) care trebuie determinate din condițiile inițiale.

Ținînd seama că $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, din relația (1) obținem că $\lim_{n\to\infty} A_n = U$.

Din:

$$\begin{cases} U + V = A_0 \\ U - \frac{1}{2}V = A_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U + V = A_0 \\ 2U - V = 2A_1 \end{cases}$$

obținem:

$$U = \frac{1}{3}(A_0 + 2A_1) = \frac{1}{3} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 27 \\ 17 & 22 \\ 8 & 4 \end{Vmatrix}.$$

1.161. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unde* $a_n = a + (n-1)r$, $a, r > 0$. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{\ln a_n}.$$

(D.M. Bătinețu).

Soluție. Notăm:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}, \quad B_i = \ln a_i$$

și atunci se verifică ușor condițiile teoremei CESARO-STOLZ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\ln a_{n+1} - \ln a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a+nr)\ln \frac{a+nr}{a+(n-1)r}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a+nr)\ln\left(1 + \frac{r}{a+(n-1)r}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\left(1 + \frac{r}{a+(n-1)r}\right)^{\frac{a_n}{r}}\right)^{\frac{a_{n+1}}{a_n}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{(a+nr)r}{a+(n-1)r}} = \frac{1}{\frac{r^2}{r}} = \frac{1}{r}.$$

1.162. *Se dă funcția* $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ *așa încît*

$$f(x)=(1+\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)^{\frac{2}{n^2}}.$$

Soluție. Avem:

$$a_n=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+\ln\prod_{i=1}^{n}(1+ix)\right)^{\frac{1}{\ln\prod_{i=1}^{n}(1+ix)}\cdot\frac{\ln\prod_{i=1}^{n}(1+ix)}{x}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\ln\prod_{i=1}^{n}(1+ix)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\prod_{i=1}^{n}(1+ix)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\prod_{i=1}^{n}\left((1+ix)^{\frac{1}{ix}}\right)^{i}=\prod_{i=1}^{n}e^{i}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Prin urmare

$$(a_n)^{\frac{2}{n^2}}=e^{\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2}{n^2}}=e^{\frac{n+1}{n}}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\lim_{x\to 0}f(x)^{\frac{2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln e^{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to 0}\frac{n+1}{n}=1.$$

1.163. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *al cărui termen general este:*

$$a_n=\left(1+\frac{1}{kn}\right)\left(1+\frac{2}{kn}\right)^n\ldots\left(1+\frac{kn}{kn}\right),\ k\in\mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *și* $\lim_{n\to\infty}a_n$.

(Liviu Pîrșan, G.M.B., 1974).

Soluție. Avem:

$$a_n = \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+kn)}{(kn)^{kn}} \text{ și}$$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{kn+k}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{kn+k}\right)\dots\left(1+\frac{kn+k}{kn+k}\right)$$

deci:

$$a_{n+1} = \frac{(kn+k+1)(kn+k+2)\dots(kn+k+kn+k)}{(kn+k)^{kn+k}}.$$

Prin urmare:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)\cdot(kn+k)^k}{(2kn+1)(2kn+2)\dots(2kn+2k)}\cdot\left(\frac{kn+k}{kn}\right)^{kn},$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{k}{2k}\right)^{2k}\cdot e^k = \left(\frac{e}{4}\right)^k.$$

Deoarece:

$$a_n > \frac{1}{kn}+\frac{2}{kn}+\dots+\frac{kn}{kn} = \frac{kn(kn+1)}{2kn}, \quad (\forall)\, n\in\mathbf{N}^*,$$

rezultă, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

1.164. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\dots+\frac{n}{3^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a^3}+\frac{4}{a^4}+\dots+\frac{n}{a^n}\right),$$

unde $|a|>1$.

Soluție. Vom calcula numai a doua limită din enunț, deoarece prima se obține în cazul particular $a=3$.

Folosim identitatea:

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \quad (x \neq 1),$$

care se mai poate scrie:

$$3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - x - 2x^2.$$

Punînd $x = \frac{1}{a}$ și ținînd seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+2}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{a^{n+1}} = 0$ (pentru $|a| > 1$), rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} + \ldots + \frac{n}{a^n}\right) = \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2} - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} =$$

$$= \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{a+2}{a^2} = \frac{3a-2}{a^2(a-1)^2}.$$

De unde pentru $a = 3$ obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}\right) = \frac{3\cdot 3 - 2}{3^2\cdot(3-1)^2} = \frac{7}{36}.$$

1.165. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un șir de numere reale astfel încît* $x_0 > 0$; $x_n = x_{n-1} + r$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, $r > 0$.
Considerăm șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ *unde:*

$$y_n = \begin{vmatrix} x_0 + x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ x_0 & x_0 + x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_0 & x_2 & x_3 \ldots & x_0 + x_n \end{vmatrix}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n^2\, x_0^{n-1}}.$$

(Admitere, Colegiul din Cambridge, Anglia, 1972).

Soluție. Este evident că:

$$x_n = x_0 + nr, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

și prin urmare:

$$y_n = \begin{vmatrix} s_n & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ s_n & x_0 + x_2 & x_3 \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & x_2 & x_3 \dots & x_0 + x_n \end{vmatrix} = s_n \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ 1 & x_0 + x_2 & x_3 \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & x_3 \dots & x_0 + x_n \end{vmatrix} =$$

$$= s_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & x_0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & 0 & x_0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots x_n \end{vmatrix} = x_0^{n-1} \cdot s_n$$

unde am notat:

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \frac{(n+1)(x_n + x_0)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(2x_0 + nr)}{2} = \frac{(n+1)(nr + 2x_0)}{2}.$$

Deci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n^2 x_0^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_0^{n-1}(nr + 2x_0)(n+1)}{2x_0^{n-1}(nr + x_0)^2} = \frac{1}{2r}.$$

1.166. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n \geq 1}$ *unde* $a \in \mathbf{R}$ *:*

$$a_n = \begin{vmatrix} a + x & a & \dots & a \\ a & a + x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a + x \end{vmatrix}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to \infty} \frac{a_{n+1}}{x\, a_n} \right) \text{ și } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \right).$$

Soluție. Avem:

$$a_n = \begin{vmatrix} na + x & a & a & \dots & a \\ na + x & a + x & a & \dots & a \\ na + x & a & a + x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na + x & a & a & \dots & a + x \end{vmatrix} =$$

$$= (na + x) \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & a + x & a & \dots & a \\ 1 & a & a + x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & a + x \end{vmatrix} =$$

$$= (na + x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = (na + x)x^{n-1}.$$

Prin urmare:

$$\frac{a_{n+1}}{xa_n} = \frac{na + a + x}{na + x}$$

și atunci:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_{n+1}}{xa_n} = \frac{(n + 1)a}{na} = \frac{n + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Deci:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to 0} \frac{a_{n+1}}{xa_n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}=$$

$$=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1+0=1$$

(am aplicat teorema CESARO-STOLZ).

1.167. *Fiind dat şirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu* $a_1=1+x^2$, $a_2=1+x^2+x^4$ *şi:*

$$a_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0\ldots 0 & 0\\ x & 1+x^2 & x & 0\ldots 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & 0\ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ldots\cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots x & 1+x^2 \end{vmatrix},\ (\forall)\ n\geqslant 3,$$

unde $x\in\mathbf{R}$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluţie. Dacă dezvoltăm determinantul a_n după elementele primei linii obţinem:

$$a_n=(1+x^2)a_{n-1}-x^2a_{n-2},\quad (\forall)\quad n>2.$$

Prin inducţie completă se demonstrează că:

$$a_n=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}.$$

Deci a_n este suma unei progresii geometrice de raţie $r=x^2$.

Dacă $x\in\{-1,1\}$ atunci $a_n=n+1$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

Dacă $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ atunci $a_n=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}$ şi deci dacă $|x|<1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{1-x^2}$; iar dacă $|x|>1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

1.168. *Se dă matricea* $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$ *unde* $a, b \in (-1, 1)$.

Fie şirurile $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *unde* $B_n = \sum_{k=1}^{n} A^k$ *şi* $b_n = \sum_{k=1}^{n} det\,(A^k)$. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n, \lim_{n\to\infty} B_n, \lim_{n\to\infty} det\,(B_n), det \lim_{n\to\infty} (B_n).$$

Soluţie. Se probează prin inducţie că $A_n = \begin{Vmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{Vmatrix}$

şi atunci:

$$B_n = \begin{Vmatrix} a + a^2 + \ldots + a^n & 0 \\ 0 & b + b^2 + \ldots + b^n \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a \cdot \dfrac{1-a^n}{1-a} & 0 \\ 0 & b \cdot \dfrac{1-b^n}{1-b} \end{Vmatrix}.$$

Prin urmare:

$$\det B_n = ab\,\frac{1-a^n}{1-a}\cdot\frac{1-b^n}{1-b}.$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \begin{Vmatrix} \dfrac{a}{1-a} & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{1-b} \end{Vmatrix}, \det\,(\lim_{n\to\infty} B_n) =$$

$$= \frac{ab}{(1-a)(1-b)}, \lim_{n\to\infty} \det\,(B_n) = \frac{ab}{(1-a)(1-b)}.$$

Deoarece $\det\,(A^k) = a^k b^k$ rezultă că:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a^k b^k = ab \cdot \frac{1-(ab)^n}{1-ab}$$

şi deci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{ab}{1-ab}.$$

1.169*. *Fie* $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbf{N}^*$ *astfel încît* $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ *şi:*

$$a_n = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{k_1}+1} + \frac{1}{n^{k_1}+2} + \cdots + \frac{1}{n^{k_2}} + \frac{1}{n^{k_2}+1} + \frac{1}{n^{k_2}+2} + \cdots + \frac{1}{n^{k_3}}\right), \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(Maria Giurgiu).

Soluţie. Notînd $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ şi ţinînd cont că:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - \ln n) = C,$$

rezultă că $(\exists)(d_n)_{n\geq 1}$ astfel încît:

$$b_n = \ln n + C + d_n.$$

Deci:

$$a_n = \frac{1}{\ln n}\left(b_{n^{k_2}} - b_{n^{k_1}} + b_{n^{k_4}} - b_{n^{k_3}} - k_2 \ln n + k_1 \ln n - k_4 \ln n + k_3 \ln n + d_{n^{k_2}} - d_{n^{k_1}} + d_{n^{k_4}} - d_{n^{k_3}}\right) = -k_1 + k_2 - k_3 + k_4 + \frac{d_{n^{k_2}} - d_{n^{k_1}} + d_{n^{k_4}} - d_{n^{k_3}}}{\ln n}$$

de unde, prin trecere la limită, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k_4 - k_3 + k_2 - k_1.$$

1.170*. *Fie* $A \subset \mathbf{R}$ *şi* $f: A \to A$ *astfel încît:*

$$(f \circ f)(x) = x, \quad (\forall)\ x \in A.$$

Să se determine $B \subset A$ *astfel încît şirul:*

$$a_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori.}}(x), \quad n \in \mathbf{N}^*$$

să fie convergent, $(\forall)\ x \in B$.

Soluție. Vom demonstra că șirul $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ este periodic de perioadă 2, $(\forall)x \in A$.

Într-adevăr:

$$a_{n+2}(x) = (fof)\,(a_n(x)) = 1_A(a_n(x)) = a_n(x),\ (\forall)\ x \in A.$$

Rezultă că șirul $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent pentru un $x \in A$, dat, dacă și numai dacă este constant.

Prin urmare, $a_1(x) = a_2(x)$ dacă și numai dacă $f(x) = (fof)\,(x) = x$ adică, dacă și numai dacă x este punct fix pentru f. Deci, $B = \{x \in A \mid f(x) = x\}$.

Având în vedere că din $fof = 1_A$ rezultă că f este bijecție și că nu orice bijecție are puncte fixe este posibil ca $B = \emptyset$.

1.171. *Să se calculeze produsul:*

$$x_n = \prod_{i=2}^{n} \frac{(3i-1)^3 + 3^3}{(3i-1)^3 - 3^3},\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și după aceea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Fie $P, Q \in \mathbf{R}[x]$ unde:

$$P(x) = (3x-1)^3 + 3^3 = (3x+2)(9x^2 - 15x + 13),$$

$$Q(x) = (3x-1)^3 - 3^3 = (3x-4)\cdot(9x^2 + 3x + 7).$$

Dacă notăm:

$$u(x) = 3x + 2,\ v(x) = 9x^2 - 15x + 13,$$

$$w(x) = 3x - 4,\ t(x) = 9x^2 + 3x + 7,$$

atunci observăm că:

$$w(x+2) = 3(x+2) - 4 = 3x + 2 = u(x),\ v(x+1) = 9(x+1)^2 - 15(x+1) + 13 = 9x^2 + 18x + 9 - 15x - 15 + 13 = 9x^2 + 3x + 7 = t(x).$$

Deci $(3i-1)^3 + 3^3 = u(i)\cdot v(i)$ și:

$$(3i-1)^3 - 3^3 = w(i)\cdot t(i).$$

Rezultă că:

$$x_n = \prod_{i=2}^{n} \frac{(3i-1)^3+3^3}{(3i-1)^3-3^3} = \prod_{i=2}^{n} \frac{u(i)\cdot v(i)}{w(i)\cdot t(i)} =$$

$$= \prod_{i=2}^{n} \frac{w(i+2)\cdot v(i)}{w(i)\cdot v(i+1)} = \frac{w(n+1)\,w(n+2)}{v(n+1)} = \frac{(3n+2)(3n-1)}{9n^2+3n+7},$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

1.172. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx)^{\frac{1}{n^3x^2}}\right).$$

Soluție. Fie $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx.$$

Atunci $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty}\left((1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right)^{\frac{u(x)}{n^3x^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{u(x)}{x^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^3}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin^2 2x}{x^2}+\ldots+\frac{\sin^2 nx}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

1.173. *Fie* $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *și*

$$a_n(x) = \underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n\ ori}(x),\quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot a_n(x)$.

Soluție. Avem:

$$a_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad a_2(x) = f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

și, prin inducție, se demonstrează că:

$$a_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

Deci:

$$\sqrt{n} \cdot a_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n(x) = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sign} x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*.$$

1.174*. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît* $x_0 \in \mathbf{R}^*$ *și:*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n \cdot x_n^2}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că dacă $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n = x \in \mathbf{R}^*$, *atunci* $x = 1$.

Soluție. Din modul cum a fost definit șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $x_{n+1} < x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Însă $\lim_{n\to\infty} nx_n = x \in \mathbf{R}^*$ este echivalent cu $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît:

$$|nx_n - x| < \varepsilon, \ (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

deci echivalent cu:

$$(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

astfel încît:

$$-\varepsilon + x < nx_n < \varepsilon + x, \ (\forall) n > n_\varepsilon$$

Prin urmare:

$$(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

astfel încît:

$$\frac{-\varepsilon + x}{n} < x_n < \frac{\varepsilon + x}{n}, \ (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

de unde, prin trecere la limită, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Din $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $x_{n+1} < x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ rezultă $\frac{1}{x_n} = y_n \in \mathbf{R}_+^*$, $y_{n+1} > y_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $\lim y_n = +\infty$.

Prin urmare avem:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_{n+1} = \frac{n}{y_n} + y_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

adică cu:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n}{y_n}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

deci cu:

$$y_{n+1} - y_n = nx_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = \lim_{n\to\infty} nx_n = x \in \mathbf{R}^*.$$

În relația:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n}{y_n}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

trecînd la limită și aplicînd teorema CESARO-STOLZ obținem:

$$x = \lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{y_{n+1} - y_n} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n)} = \frac{1}{x}.$$

Deci $x^2 = 1$ adică $x \in \{-1, 1\}$.

Deoarece:

$$y_{n+1} - y_n > 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

rezultă că nu este posibil ca $x = -1$ și deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

1.175. *Fie* $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, cu $f_1(x) = -x^2 + 2x$ *și pentru* $(\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, $f_n = f_1 \circ f_{n-1}$. *Să se demonstreze că pentru orice* $x \in [0, 1]$ *șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n = f_n(x)$ *este convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluție. Din, $f_n(x) \in [0, 1]$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall) x \in [0, 1]$ rezultă că:

$$f_n^2(x) \leqslant f_n(x), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \quad (\forall) x \in [0, 1].$$

Pentru $(\forall) x \in [0, 1]$, avem:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f_{n+1}(x) - f_n(x) = f_1(f_n(x)) - f_n(x) = \\ &= -f_n^2(x) + 2f_n(x) - f_n(x) = -f_n^2(x) + f_n(x) = \\ &= f_n(x)(1 - f_n(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că șirul dat este crescător. Este evident că din $f_n(x) \in [0, 1]$ rezultă că el este și mărginit.

Fiind monoton și mărginit el este convergent.

Pentru $x = 0$ avem $f_n(0) = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ deci $a_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, deci, dacă $x = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, și reciproc.

Dacă $x \in (0, 1]$ atunci, notînd $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, avem că:

$$f_{n+1}(x) = -f_n^2(x) + 2f_n(x)$$

sau:

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$$

de unde, prin trecere la limită, obținem $a = 2a - a^2$ sau $a^2 = a$ adică $a = 0$ sau $a = 1$. Deoarece șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este crescător și $a_n \in [0, 1]$ rezultă că $a \neq 0$ adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

În concluzie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = 0 \\ 1 \text{ dacă } x \in (0, 1], \end{cases}$$

1.176. *Fie* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un şir astfel încît*

$$y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1}),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că dacă $y_0,\ y_1 > 0$ *atunci şirul* $(y_n)_{n>0}$ *converge şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}$.

Soluţie. Avem $y_1 = y_0(2 - xy_0) > 0$, deci $2 - xy_0 > 0$ sau $1 - xy_0 > -1$. Deoarece $y_0 > 0$ atunci $1 - xy_0 < 1$, şi, prin urmare, $|1 - xy_0| < 1$. Pe de altă parte avem:

$$\frac{1}{x} - y_1 = \frac{1}{x} - 2y_0 + xy_0^2$$

echivalent cu:

$$1 - xy_1 = 1 - 2xy_0 + x^2y_0^2 = (1 - xy_0)^2.$$

Prin urmare:

$$1 - xy_2 = (1 - xy_1)^2 = (1 - xy_0)^{2^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1 - xy_n) = (1 - xy_0)^{2^n}.$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}(1 - xy_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - xy_0)^{2^n} = 0$$

unde am ţinut seama că $|1 - xy_0| < 1$, iar dacă ţinem seama că $x \in \mathbf{R}_+^*$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}$.

1.177*. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un şir de numere întregi cu proprietatea că* $a_2 = 2$ *şi:*

$$a_{mn} = a_m \cdot a_n,\ (\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$$

şi $a_m > a_n$ *dacă* $m > n$.

Să se determine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^3}.$$

(Olimpiada matematică, Canada, 1972.)

Soluţie. Deoarece $0 = 0 \cdot 2$ atunci $a_0 = a_{0\cdot 2} = a_0 \cdot a_2 = 2a_0$ deci $a_0 = 0$. Din $0 < 1 < 2$ rezultă că $a_0 < a_1 < a_2$ adică $0 < a_1 < 2$ şi cum $a_1 \in \mathbf{Z}$ rezultă că $a_1 = 1$.

Să presupunem că pentru $(\forall)\ n \leqslant k$ avem $a_n = n$ și să se demonstrăm că și pentru $n = k+1$ avem $a_{k+1} = k+1$.

Sînt două posibilități:

a°). $k = 2p$, atunci $k+1 = 2p+1$ și deci:

$$2p < k+1 < 2(p+1)$$

sau:

$$a_{2p} < a_{k+1} < a_{2(p+1)}$$

echivalent cu:

$$a_2 \cdot a_p < a_{k+1} < a_2 \cdot a_{p+1}$$

sau:

$$2p < a_{k+1} < 2p+2$$

și cum $a_{k+1} \in \mathbf{Z}$ rezultă că $a_{k+1} = k+1$.

b°). $k = 2p+1$; atunci $k+1 = 2p+2 = 2(p+1)$ deci:

$$a_{k+1} = a_{2(p+1)} = a_2 \cdot a_{p+1} = 2(p+1) = k+1.$$

Deci, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ avem $a_n = n$ și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

1.178. *Fie șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît* $x_1 = \frac{1}{6}$ *și*

$$x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+3},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se exprime termenul general x_n *în funcție de* n *și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Soluție. Relația de recurență se mai scrie:

$$(k+3)x_{k+1} = kx_k,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$$

de unde obținem:

$$\prod_{k=1}^{n}(k+3)x_{k+1}=\prod_{k=1}^{n}kx_k$$

sau:

$$\left(\prod_{j=4}^{n+3}j\right)\left(\prod_{i=2}^{n+1}x_i\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)$$

și deci rezultă:

$$(n+1)(n+2)(n+3)x_{n+1}=1\cdot 2\cdot 3\ldots x_1$$

echivalent cu:

$$x_{n+1}=\frac{6x_1}{(n+1)(n+2)(n+3)},\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Prin urmare:

$$x_n=\frac{6x_1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),\quad (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{2}{i+2}+\frac{1}{i+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+$$

$$+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{4}.$$

1.179*. *Dacă* p_n *este al* n*-lea număr prim,* $p_1 = 2$, *iar* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este șirul lui* FIBONACCI:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ x_1 = x_2 = 1,$$

să se arate că:

$$p_n \leqslant x_{n+2},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Vom ține seama[1] că:

$$p_{n+1} \leqslant p_n + p_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și de relația de recurență a șirului lui *Fibonacci*.

Pentru $n = 1$ avem $p_1 = x_3 = 2$. Pentru $n = 2$ avem: $3 = p_2 = x_4$. Pentru $n = 3$ avem $5 = p_3 = x_5$ iar pentru $n = 4$ avem $7 = p_4 < 8 = x_6$.

Presupunem că pentru $(\forall)\ n \geqslant 2$ avem:

$$p_{n-1} \leqslant x_{n+1},\ p_n \leqslant x_{n+2}$$

și să demonstrăm că avem $p_{n+1} < x_{n+3}$.

Într-adevăr:

$$p_{n+1} \leqslant p_n + p_{n-1} \leqslant x_{n+1} + x_{n+2} = x_{n+3}.$$

Conform principiului inducției complete, rezultă că:

$$p_n < x_{n+2},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

1.180. *Fiind date șirurile de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu proprietatea că:*

$$a_{n+1}a_n + a_n + a_{n+1} + 1 = a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

$$b_0 = 1936,\ b_1 = 1976,\ b_2 = 40$$

și:

$$b_{n+1} \cdot b_n + b_{n+1} + 1 = b_n,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

să se stabilească dacă cele două șiruri au limită și să se determine șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(D. M. Bătinețu, G. M. 16250)

[1] v. Sierpinski, Waclaw, *Ce știm și ce nu știm despre numere prime*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1967.

Soluție. Ne ocupăm mai întîi de șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Se demonstrează fără dificultate (prin reducere la absurd) că $a_n \notin \{-1, 0, 1\}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Fie $m \in \mathbf{N}$ arbitrar; atunci $(\exists)\, \alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît $a_m = \operatorname{tg}\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$.

Din relația de recurență obținem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Deci:

$$a_{m+1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

și atunci:

$$a_{m+2} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad a_{m+3} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$a_{m+4} = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}\alpha = a_m.$$

Cum $m \in \mathbf{N}$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant m$, $a_{n+4} = a_n$ adică șirul este periodic de perioadă $t = 4$.

Deoarece șirul este $\mathbf{m}$-periodic de perioadă $t > 1$, atunci nu poate să aibă limită, deoarece $a_{n+1} \neq a_n$ (ceea ce rezultă prin reducere la absurd).

Analog rezultă că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este periodic de perioadă $t = 4$ și deci nu are limită.

Șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este:

$$b_0 = 1936,\ b_1 = 1976,\ b_2 = 40,\ b_3 = \frac{39}{41},\ b_4 = -\frac{1}{40},$$

$$b_5 = -\frac{41}{39},\ b_6 = 40,\ b_7 = b_3,\ b_8 = b_4,\ b_9 = b_5, \ldots$$

1.181. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir convergent la zero și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir mărginit. Atunci șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *unde:*

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot (a_1 b_n + \ldots + a_n b_1),\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

este convergent la zero.

Soluție. Din $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ rezultă $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(|a_1| + \ldots + |a_n|) = 0.$$

Fiindă $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit deci există $M > 0$, a. î. $|b_n| \leq M$, $(\forall) n \geq 1$. Prin urmare:

$$|x_n| \leq \frac{1}{n}(|a_1||b_n| + \ldots + |a_n||b_1|) \leq$$

$$\leq \frac{M}{n}(|a_1| + \ldots + |a_n|).$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

1.182. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere definit astfel*

$$x_0 = a \in \mathbf{R}^*, \; x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \; (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Soluție. Dacă $a \in \mathbf{R}_+^*$ rezultă imediat că:

$$x_n > x_{n-1} > a, \; (\forall) \; n \geq 1$$

deci $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ există, finită sau $+\infty$. Dacă am avea $x \in \mathbf{R}^*$ atunci prin trecere la limită în egalitatea

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

am obține egalitatea absurdă $x = x + \frac{1}{x}$, deci $x = +\infty$.

Dacă $a \in \mathbf{R}_-^*$ se arată analog că $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

1.183. *Fie* a *un număr real* $0 \leq a \leq 1$. *Fie* $a_1 = \sqrt{1 - a}$ *și*

$$a_n = \sqrt{1 - a_{n-1}}$$

pentru $n \geq 2$. *Să se studieze convergența șirului* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Soluție. Se constată cu ușurință că $a_1 = a_2$ este echivalent cu $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și în acest caz șirul este constant, $a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, și deci este convergent. În cazul $a = 0$, șirul este divergent și la fel pentru $a = 1$. Să presupunem că $a \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$; atunci se vede ușor că $a_1 < a_2$, de unde rezultă $a_3 < a_2$ și $a_1 < a_3$.

Rezultă:

$$a_4 = \sqrt{1-a_3} > \sqrt{1-a_2} = a_3,$$

$$a_4 = \sqrt{1-a_3} < \sqrt{1-a_1} = a_2.$$

Așadar, $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$. Prin inducție completă se demonstrează inegalitățile

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}.$$

De aici deducem că subșirul termenilor de rang impar al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și subșirul termenilor de rang par al acestuia sînt convergente. Fie $u = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, $v = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$. Din $a_{n+1} = \sqrt{1-a_n}$ deducem $u = \sqrt{1-v}$, $v = \sqrt{1-u}$ din care, observînd că $u \neq 0$, $u \neq 1$, $v \neq 0$, $v \neq 1$ obținem $u = v = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Să analizăm acum cazul $a \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Avem: $1 - a \in \left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, 1\right)$ și deci $\sqrt{1-a} \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$, și atunci neglijînd primul termen al șirului, sîntem în situația de mai sus; rezultă că pentru $a \neq 0$, $a \neq 1$ șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și are limita $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1.184. *Se consideră șirurile* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *unde* $u_0 = 1$, *și:*

$$u_n = \frac{2u_{n-1}-1}{2u_{n-1}+5}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*, \ v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

a°). *Să se arate că șirul* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este o progresie geometrică, să se calculeze rația sa și* $\lim_{n\to\infty} v_n$.

b°). *Să se exprime* u_n *în funcție de* n *și să se stabilească natura sa.*

(Bacalaureat, Franța, 1975).

Soluție. a°). Este evident că:

$$u_n + 1 \neq 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Șirul $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă $(\exists)\ r \in \mathbf{R}^*$ astfel încît $v_{n+1} = v_n r$ deci:

$$\frac{2u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 1} = r \cdot \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

echivalent cu:

$$\frac{2 \cdot \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} + 1}{\dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} + 1} = r \cdot \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{4u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n - 1 + 2u_n + 5} =$$

$$= r \cdot \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

adică:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \cdot u_n + 1)}{(u_n + 1)} = r \cdot \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

și deci cu:

$$r = \frac{3}{4}. \quad \text{Deci } v_0 = \frac{3}{2}, \ r = \frac{3}{4}.$$

Rezultă deci că:

$$v_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Și prin urmare: $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

b°). Din:

$$v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

rezultă:

$$v_n \cdot u_n + v_n = 2 \cdot u_n + 1$$

adică:

$$u_n(v_n - 2) = 1 - v_n$$

și deci:

$$u_n = \frac{1 - v_n}{v_n - 2} = \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3^n}{4^n}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3^n}{4^n} - 2} = \frac{2 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{3^{n+1} - 4^{n+1}} =$$

$$= \frac{4^n}{4^{n+1}} \cdot \frac{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1},$$

de unde prin trecere la limită, obținem: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

1.185*. *Se dă funcția* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *dată de legea:*

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x + a)}{x^2 + 1}.$$

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență:*

$$a_{n+1} = f(a_n), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Deoarece $f : [0, 1] \to [0, 1]$ rezultă că $f(0), f(1) \in [0, 1]$. Dar $f(0) = a$ și $f(1) = a + 1$, deci $f(0), f(1) \in [0, 1]$ implică $0 \leqslant a \leqslant 1$ și $0 \leqslant a + 1 \leqslant 1$ adică $a = 0$.

Prin urmare, $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ și deci:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n}{a_n^2 + 1}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{a_n + 1}{a_n^2 + 1}, \tag{1}$$

iar $a_n \in [0, 1]$ implică $0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_n$ deci $1 \leqslant a_n^2 + 1 \leqslant a_n + 1$ sau $\frac{a_n + 1}{a_n^2 + 1} \geqslant 1$ și atunci (1) ne dă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ adică $a_{n+1} \geqslant a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Deci șirul este crescător și deoarece este și mărginit rezultă că este convergent.

Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_n = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și deci, în acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dacă însă $a_0 \in (0, 1]$ atunci, trecînd la limită în relația de recurență, obținem:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a^2 + a}{a^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a = a^2 + a \Leftrightarrow a^3 = a^2 \Leftrightarrow a^2 (a - 1) = 0. \qquad (2)$$

Deoarece șirul este strict crescător pentru $a_0 \in (0, 1]$ rezultă că $a \neq 0$ și deci din (2) obținem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 \text{ dacă } a_0 = 0 \\ 1 \text{ dacă } a_0 \in (0, 1]. \end{cases}$$

1.186. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *trei șiruri de numere reale cu proprietatea că există* $a, b \in \mathbf{R}^*$ *astfel încît:*

$$|a x_n + b y_n| \leqslant |z_n| \cdot |y_n|, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *atunci șirul* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *este convergent dacă și numai dacă șirul* $(y_n)_{n\geqslant 0}$ *este convergent.*

Soluție. Dacă șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbf{R}$ și deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n z_n = 0$ deci:

$$\lim_{n\to\infty} |a x_n + b y_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} |z_n y_n| = 0$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} (a x_n + b y_n) = 0.$$

Fie deci:

$$u_n = a x_n + b y_n.$$

Atunci:

$$ax_n = u_n - by_n$$

deci:

$$x_n = \frac{1}{a} \cdot u_n - \frac{b}{a} \cdot y_n$$

astfel că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a} \cdot u_n - \frac{b}{a} \cdot y_n \right) = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n \to \infty} u_n - \frac{b}{a} \cdot \lim_{n \to \infty} y_n =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot 0 - \frac{b}{a} \cdot y = -\frac{b}{a} \cdot y.$$

Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent atunci există $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbf{R}$. Avem:

$$y_n = \frac{1}{b}(by_n) = \frac{1}{b}(ax_n + by_n) - \frac{a}{b} \cdot x_n$$

deci:

$$|y_n| \leq \frac{1}{|b|} |ax_n + by_n| + \frac{|a|}{|b|} \cdot |x_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|b|} |z_n| \cdot |y_n| + \frac{|a|}{|b|} \cdot |x_n|$$

adică:

$$|y_n| \cdot \left(1 - \frac{|z_n|}{|b|}\right) \leq \frac{|a|}{|b|} \cdot |x_n|.$$

Deoarece $z_n \to 0$ rezultă că $(\exists)\, n_b \in \mathbf{N}$ astfel încît, $(\forall)\, n \geq n_b$ avem $|z_n| < |b|$. Deci, pentru orice $n \geq n_b$ avem $1 - \frac{|z_n|}{|b|} > 0$ și deci:

$$|y_n| < \frac{|a|}{|b| \left(1 - \frac{|z_n|}{|b|}\right)} \cdot |x_n| = \frac{|a|}{|b| - |z_n|} \cdot |x_n| \leq$$

$$\leq \frac{|a|}{|b|} \cdot |x_n|, \quad (\forall)\, n \geq n_b.$$

Deci pentru $(\forall) n \geqslant n_b$ avem:

$$|ax_n + by_n| \leqslant |z_n| \cdot |y_n| \leqslant \frac{|a|}{|b|} \cdot |z_n| \cdot |x_n|$$

și deoarece $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} |ax_n + by_n| \leqslant \frac{|a|}{|b|} \cdot \lim_{n\to\infty} |z_n| \cdot |x_n| = \frac{|a|}{|b|} \cdot 0 \cdot x = 0.$$

În concluzie:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (ax_n + by_n) = 0.$$

Dar:

$$u_n = ax_n + by_n$$

de unde rezultă:

$$by_n = u_n - ax_n$$

și prin urmare:

$$y_n = \frac{1}{b} \cdot u_n - \frac{a}{b} \cdot x_n$$

sau:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{b} \cdot \lim_{n\to\infty} u_n - \frac{a}{b} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{b} \cdot 0 - \frac{a}{b} \cdot x = -\frac{a}{b} \cdot x.$$

1.187*. *Fie* $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *un șir cu proprietatea că* $\alpha_n \in [0, 1]$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit astfel*

$$x_0 = b, \quad x_n = a \cdot \alpha_n + (1 - \alpha_n) \cdot x_{n-1}, \quad a \leqslant b$$

este convergent. Dacă șirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este crescător atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(Gh. Zaharia, G.M. 16082)

Soluție. Demonstrăm prin inducție că propozițiile:

$$p(n) : x_n \geqslant a$$

sînt adevărate $(\forall) n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow v(p(n)) = 1$, unde v este funcția valoare de adevăr, $v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ ($\mathcal{P}$ este mulțimea tuturor propozițiilor).

Avem: $v(p(0)) = 1$. În adevăr, $x_0 = b \geqslant a$. De asemenea, $v(p(1)) = 1 \Leftrightarrow x_1 = a\alpha_1 + (1 - \alpha_1) \cdot x_0 \Leftrightarrow x_1 - a = a\alpha_1 + (1 - \alpha_1) b - a = (1 - \alpha_1)(b - a) \geqslant 0 \Leftrightarrow x_1 \geqslant a$.

Presupunem că pentru orice $n \leqslant k$ avem $v(p(n)) = 1$ ceea ce este echivalent cu:

$$x_n \geqslant a, \ (\forall)\ n \geqslant k.$$

Să demonstrăm că $v(p(k+1)) = 1$ deci că $x_{k+1} \geqslant a$.

Într-adevăr, $v(p(k)) = 1$ este echivalent cu $x_k \geqslant a$, iar relația de recurență ne dă:

$$x_{k+1} = a\,\alpha_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1})x_k$$

echivalent cu:

$$x_{k+1} - a = a(\alpha_{k+1} - 1) + (1 - \alpha_{k+1})\,x_k =$$

$$= (1 - \alpha_{k+1})\,(x_k - a) \geqslant 0.$$

Deci $x_n \geqslant a, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Avem și:

$$x_{n+1} - x_n = \alpha_{n+1}a + (1 - \alpha_{n+1})\,x_n - x_n =$$

$$= \alpha_{n+1}(a - x_n) \leqslant 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

deci șirul este monoton descrescător și deoarece $a \leqslant x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent adică există $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}$.

Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător și ținem seama că $\alpha_n \in (0, 1]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ rezultă că $(\exists)\ \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \in (0, 1]$.

Trecînd la limită în relația de recurență obținem:

$$x = xa + (1 - \alpha)x, \Leftrightarrow x = a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

1.188. *Fie șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît* $a_1 = 1$ *și*

$$a_n = a_{n-1} + n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

și să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent.*

Soluție. Avem:

$$a_n = a_{n-1} + n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + n$$

de unde prin adunare obținem că:

$$a_n = a_1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De asemenea:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$
$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Prin urmare, există $\lim_{n\to\infty} b_n = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2$ adică șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

1.189. *Se dă șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență:*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \; x_0 = a, \; (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

Se cere:
a°). *Să se arate că acest șir este convergent.*
b°). *Să se calculeze limita acestui șir.*
c°). *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2.$$

(I.M. Stancu, G.M.B, 7892)

Soluție. a°). Din relația de recurență avem:

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leqslant 0, \; (\forall)\, n \in \mathbf{N},$$

deci șirul este descrescător. Deoarece $x_0 \in [0, 1]$ atunci $1 - x_0 \in [0, 1]$ și deci $x_1 = x_0(1 - x_0) \in [0, 1]$. Prin inducție rezultă că $x_n \in [0, 1]$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ adică șirul dat este mărginit.

Fiind monoton și mărginit rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ adică $(\exists)\, x \in \mathbf{R}$ astfel încît $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b°). Trecînd la limită în relația de recurență obținem:

$$x = x - x^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Totodată:

$$\sum_{k=0}^{n} x_n^2 = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_0 - x_{n+1}$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = x_0 - \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0 = a.$$

4.190. *Fie șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu:*

$$a_n = \sqrt{\alpha a_{n+1} + \beta},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

unde

$$\alpha, \beta, a_0 > 0 \text{ și } a_0^2 - \alpha a_0 - \beta < 0.$$

Să se arate că șirul dat este convergent și să se calculeze limita sa.

(D.M. Bătinețu, G.M.B. 1968, 9108)

Soluție. Șirul este strict crescător. Într-adevăr:

$$a_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

și atunci:

$$a_1^2 - a_0^2 = \alpha a_0 + \beta - a_0^2 > 0$$

deci $a_1 > a_0$. Apoi: $a_2^2 - a_1^2 = \alpha(a_1 - a_0) > 0$ deci $a_2 > a_1$.

Presupunem prin inducție:

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Să arătăm că $a_n < a_{n+1}$. Dar:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \alpha(a_n - a_{n-1}) > 0$$

deci $a_n < a_{n+1}$. Prin urmare șirul este strict crescător.

Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit superior de:

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

adică:

$$a_n < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Într-adevăr, din relația $a_0^2 - \alpha a_0 - \beta < 0$ deducem:

$$\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} < a_0 < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha a_0 + \beta} < \sqrt{\alpha \cdot \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} + \beta} =$$

$$= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Prin urmare:

$$a_1 < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Presupunem prin inducție:

$$a_k < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Atunci:

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n + \beta} < \sqrt{\alpha \cdot \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} + \beta} =$$

$$= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent.
Fie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$. Trecînd la limită în relația:

$$a_n^2 = \alpha a_{n-1} + \beta,$$

obținem: $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ deci:

$$x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Dar $\lim\limits_{n \to \infty} a_n > 0$ iar $x_2 < 0$. Rezultă:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

1.191. *Fiind dat șirul cu termeni pozitivi* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu* $x_0 \in (0, 2)$ *și:*

$$x_{n+1}^4 = 2x_n^2 + 8, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

să se demonstreze că acest șir este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluție. Deoarece, $x_0 \in (0, 2)$ rezultă $x_1^4 = 2x_0^2 + 8 < 16$ deci $x_1 \in (0, 2)$.

Avem:

$x_1^4 - x_0^4 = -x_0^4 + 2x_0^2 + 8 = -(x_0^2 - 1)^2 + 9$ și deoarece $x_0 < 2$ rezultă $x_0^2 < 4$ sau $x_0^2 - 1 < 3$ adică $(x_0^2 - 1)^2 < 9$; rezultă că $x_1^4 - x_0^4 > 0$ adică $x_1 > x_0$.

Să presupunem că:

$$x_{n-1} < x_n < 2, \ (\forall) \ n \in \{1, 2, ..., k\}$$

și să demonstrăm că $x_k < x_{k+1} < 2$. Avem:

$$x_{k+1}^4 = 2x_k^2 + 8$$

și deoarece $0 < x_k < 2$ rezultă că $x_{k+1} < 2$. Să arătăm că $x_{k+1} > x_k$. Într-adevăr:

$$x_{k+1}^4 - x_k^4 = -x_k^4 + 2x_k^2 + 8 = 9 - (x_k^2 - 1)^2 > 0$$

de unde obținem $x_{k+1} > x_k$.

Deci, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ avem $x_n < x_{n+1} < 2$ ceea ce ne arată că șirul este convergent. Fie $x \in \mathbf{R}$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; atunci, prin trecere la limită în relația de recurență obținem:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = i\sqrt{2}$, $x_4 = -i\sqrt{2}$.

Deoarece $x_n > 0$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

1.192. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *dat prin relația;*

$$a_{n-1} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}} \cdot a_n \text{ cu } a_0 = 1; \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

a°). *Să se calculeze* a_n.

b°). *Să se demonstreze că șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent.*

c°). *Să se calculeze :*

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{n \to \infty} a_n \right).$$

Soluție. a°). Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ atunci $\frac{x}{2^n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. $(\forall) n \in \mathbf{N}$, și deci $\cos \frac{x}{2^n} \neq 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Rezultă că $a_n = a_{n-1} \cos \frac{x}{2^n}$ de unde obținem:

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \ldots \cos \frac{x}{2^n}. \tag{1}$$

iar prin înmulțire cu $2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}$ rezultă:

$$2^n \cdot a_n \sin \frac{x}{2^n} = \sin x,$$

adică:

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}. \tag{2}$$

b°). Este evident că $a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și că din (1) rezultă:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cos \frac{x}{2^{n+1}} < 1$$

echivalent cu $a_{n+1} < a_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este descrescător și mărginit; adică este convergent.

c°). Din (2) obținem:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.193. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *două șiruri definite astfel:*

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad b_1 = \frac{a_1+b}{2},\quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2},\quad (\forall)\ n \geq 1$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$ *și* $a < b$. *Atunci cele două șiruri sînt convergente și au aceeași limită.*

Soluție. Notăm $a_0 = a$, $b_0 = b$ și să arătăm că:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n,\ (\forall)\ n \geq 0, \tag{1}$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{4^n}(b-a),\ (\forall)\ n \geq 0. \tag{2}$$

Într-adevăr, din $a < b$ și $a_1 = \frac{a+b}{2}$ avem $a < a_1 < b$, iar din $a_1 < b$ și $b_1 = \frac{a_1+b}{2}$ avem $a_1 < b_1 < b$ deci $a < a_1 < b_1 < b$, adică inegalitatea (1) pentru $n = 1$.

Presupunem că:

$$a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k,$$

atunci din $a_k < b_k$ și $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ avem $a_k < a_{k+1} < b_k$, iar din $a_{k+1} < b_k$ și $b_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_k}{2}$ avem:

$$a_{k+1} < b_{k+1} < b_k$$

deci:

$$a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k.$$

În virtutea principiului inducției complete avem atunci că:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n,\ (\forall)\ n \geq 0.$$

Cum:

$$b_1 - a_1 = \frac{a_1 + b}{2} - \frac{a + b}{2} = \frac{a_1 - a}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a + b) - a}{2} = \frac{b - a}{4}$$

rezultă că (2) este adevărată pentru $n = 1$.

Presupunem că:

$$b_k - a_k = \frac{1}{4^k}(b - a);$$

atunci:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_k}{2} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_{k+1}}{2} = \frac{b_k - a_k}{4}$$

deci:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}} \cdot (b - a).$$

Prin urmare, în virtutea principiului inducției complete avem că:

$$b_n - a_n = \frac{1}{4^n}(b - a), \quad (\forall)\, n \geqslant 0.$$

Din (1) rezultă că $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir crescător și majorat, iar $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir descrescător și minorat deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ există și sînt finite, iar din (2) deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. Așadar, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

1.194. *Utilizînd teorema de convergență a șirurilor monotone să se determine limita șirului definit prin:*

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}.$$

Soluție. Avem $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1$ și, presupunînd $a_{n-1} < a_n$, rezultă $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$ și astfel șirul este strict crescător.

Șirul este mărginit. În adevăr, $a_1 = 2$, $a_2 = \sqrt{2 + a_1} < 2$ și, în ipoteza $a_{n-1} < 2$, rezultă $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < 2$. Șirul fiind mărginit superior de 2, după teorema de convergență a șirurilor monotone, șirul este convergent. Fie a limita sa.

Din $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ rezultă $a = \sqrt{2 + a}$ deci $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$.

1.195. *Fie* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *șiruri de numere reale cu proprietatea că* $y_1 > x_1 > 1$ *și*

$$x_{n+1} = \frac{y_n}{x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n - 1}{x_n - 1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se determine x_1, y_1 *astfel încît cele două șiruri să fie convergente.*

Soluție. Vom arăta că:

$$x_{n+5} = x_n, \; y_{n+5} = y_n, \; (\forall)\; n \in \mathbf{N}^*$$

adică șirurile sînt periodice, de perioadă $T = 5$. După cum știm, singurele șiruri periodice convergente sînt cele de perioadă $T = 1$ adică șirurile constante.

Deci vom determina pe x_1, y_1 așa fel încît șirurile să fie constante. Avem:

$$x_{n+3} = \frac{y_{n+2}}{x_{n+2}} = \frac{\dfrac{y_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1}}{\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}} = \frac{y_{n+1} - 1}{y_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1} =$$

$$= \frac{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1} - 1}{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1}} \cdot \frac{\dfrac{y_n}{x_n}}{\dfrac{y_n}{x_n} - 1} = \frac{y_n - 1 - x_n + 1}{y_n - 1} \cdot \frac{y_n}{y_n - x_n} =$$

$$= \frac{y_n}{y_n - 1} \text{ și } y_{n+2} = \frac{y_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1} - 1}{\dfrac{y_n}{x_n} - 1} = \frac{x_n}{x_n - 1}.$$

Deci:

$$y_{n+5} = \frac{x_{n+3}}{x_{n+3} - 1} = \frac{\frac{y_n}{y_n - 1}}{\frac{y_n}{y_n - 1} - 1} = y_n.$$

și:

$$x_{n+5} = \frac{y_{n+2}}{y_{n+2} - 1} = \frac{\frac{x_n}{x_n - 1}}{\frac{x_n}{x_n - 1} - 1} = x_n.$$

Prin urmare:

$$x_{n+5} = x_n,\ y_{n+5} = y_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci șirurile sînt convergente dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, și $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5$, adică, dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$ deci, dacă și numai dacă $x_1 = \frac{y_1}{x_1}$ și $y_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 1}$ Prin urmare, dacă și numai dacă $y_1 = x_1^2$ și $x_1^3 - 2x_1^2 + 1 = 0$. Deoarece $x_1, y_1 > 1$ rezultă că $x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ și $y_1 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$.

Deci șirurile date sînt convergente dacă și numai dacă:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},\ y_1 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

1.196. *Fie* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *și să considerăm șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *unde:*

$$a_1 = x,\ a_2 = x + \frac{1}{x};\ \ldots,\ a_{n+1} = x + \frac{1}{a_n};\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *este convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Soluție. Observăm că $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ și atunci prin inducție completă se demonstrează fără dificultate că:

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci subșirul $(a_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător și mărginit superior, iar subșirul $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător și mărginit inferior. Rezultă că ambele subșiruri sînt convergente.

Fie:

$$u = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1},\ v = \lim_{n\to\infty} a_{2n};$$

atunci din relația de recurență prin trecere la limită rezultă:

$$u = x + \frac{1}{v},\ v = x + \frac{1}{u}.$$

Prin urmare:

$$u - v = \frac{1}{v} - \frac{1}{u} \Leftrightarrow u - v = \frac{u - v}{uv} \Leftrightarrow (u - v)\left(1 - \frac{1}{uv}\right) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow u = v \text{ sau } uv = 1.$$

Să mai observăm că $uv = 1$ nu este acceptabilă deoarece rezultă $\frac{1}{v} = u$ și deci:

$$u = x + \frac{1}{v} \Leftrightarrow u = x + u \Leftrightarrow x = 0,$$

ceea ce contrazice $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Deci $u = v$ adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n = u \Rightarrow u = x + \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

1.197. *Șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este dat prin relația de recurență*

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*,$$

$a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta,\ \alpha, \beta > 0$. *Să se demonstreze că* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soluție. Dacă notăm $b_n = \frac{1}{a_n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ atunci obținem că:

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n+1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,\ b_0 = \frac{1}{\alpha},\ b_1 = \frac{1}{\beta}$$

de unde rezultă că $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică strict crescătoare.

Deci: $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$

1.198. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unde* $x_0 = a$, $x_1 = b$ *şi:*

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + kx_n}{k+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

unde $k \in \mathbb{R}_+^*$. *Să se deducă termenul general al şirului şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a şirului este:

$$(k+1)x^2 - x - k = 0,$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-k}{k+1}$, deci:

$$x_n = A + B(-1)^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^n.$$

Dacă ţinem seama de condiţiile iniţiale rezultă:

$$A = \frac{a-(k+1)b}{k+2}, \quad B = \frac{(k+1)(a+b)}{k+2}$$

deci:

$$x_n = \frac{a-(k+1)b}{k+2} + \frac{(-1)^n(k+1)(a+b)}{k+2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n,$$

şi atunci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a-(k+1)b}{k+2}.$$

1.199. *Fie şirul*

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+k)(n+k+1)\ldots(2n+k)}{n^n}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluţie. Notăm:

$$b_n = \frac{(n+k)(n+k+1)\ldots(2n+k)}{n^n}$$

şi avem:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{(n+k+1)(n+k+2)\ldots(2n+k+2)}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+k)(n+k+1)\ldots(2n+k)}{n^n}} =$$

$$= \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \cdot \frac{(2n+k+1)(2n+k+2)}{(n+1)(n+k)}.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+k+1)(2n+k+2)}{(n+1)(n+k)} = 4$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4}{e}$.

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}.$$

1.200. *Să se găsească limita şirului cu termenul de rangul* n!

$$a_n = \frac{\ln n!}{n^m},$$

pentru $m, n \in \mathbf{N}$.

Soluţie. Aplicăm teorema CESARO-STOLZ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{(n+1)^m - n^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \ldots + 1} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{dacă } m \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{dacă } m \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\} \end{cases}.$$

1.201*. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere cu proprietatea că există* $p \in \mathbf{N}^*$, *a. î.:*

$$x_{n+p} = \frac{1}{p}(x_n + x_{n+1} \dots + x_{n+p}), \quad (\forall)\ n \geq 1,$$

Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi avem:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + px_p}{1 + 2 + \dots + p}.$$

(Nicu Boboc, G.M.-A.)

Soluţie. Conform cu 26., un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietatea că $(\exists)\ p \in \mathbf{N}^*$ şi $(\exists)\ a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbf{R}_+^*$ cu:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = 1$$

astfel încît:

$$x_{n+p} \leq a_1 x_{n+p-1} + a_2 x_{n+p-2} \dots + a_p x_p$$

este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. Deci, pentru a arăta că şirul dat în enunţ este convergent este suficient să arătăm că el este mărginit.

Vom arăta că $m \leq x_n \leq M$, $(\forall)\ n \geq 1$, unde:

$$m = \min\ \{x_1, x_2, \dots, x_p\},\ M = \max\ \{x_1, x_2, \dots, x_p\}.$$

Pentru $n \in \{1, 2, \dots, p\}$ afirmaţia este evidentă.

Fie $n \geq p$, a. î., $m \leq x_i \leq M$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Deoarece:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}(x_{n-p} + \dots + x_n)$$

şi:

$$m \leq x_{n-p},\ x_{n-p+1},\ \dots,\ x_n \leq M$$

rezultă că:

$$m \leq \frac{1}{p}(x_{n-p} + \dots + x_n) \leq M$$

deci: $m \leq x_{n+1} \leq M$.

În virtutea principiului inducției complete avem că $m \leqslant x_n \leqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, adică $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit.
Prin inducție relativ la n se vede imediat că:

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p = x_{n+1} + 2x_{n+2} + \ldots + px_{n+p},$$
$$(\forall) n \geqslant 1. \qquad (i)$$

Ținînd cont că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, din (i) avem: $x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} + 2 \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2} + \ldots + p \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = (1 + 2 + \ldots + p) \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p}{1 + 2 + \ldots + p}.$$

1.202. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un șir astfel încît* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *atunci șirul* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

are aceeași limită.

Soluție. Să notăm $a_n = x_n - x$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ceea ce este echivalent cu $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ avem $|a_n| < \varepsilon/2$.
Pentru $n > n_\varepsilon$ avem:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_\varepsilon}}{n} + \frac{a_{n_\varepsilon+1} + a_{n_\varepsilon+2} + \ldots + a_n}{n}$$

deci:

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_\varepsilon}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n_\varepsilon+1} + a_{n_\varepsilon+2} + \ldots + a_n}{n}\right|.$$

Dar:

$$\frac{|a_{n_\varepsilon+1}+a_{n_\varepsilon+2}+\ldots+a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}\left(|a_{n_\varepsilon+1}|+|a_{n_\varepsilon+2}|+\ldots+|a_n|\right)<$$

$$<\underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2n}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2n}}_{n-n_\varepsilon\text{ termeni}}=\left(\frac{n-n_\varepsilon}{2n}\right)\varepsilon<\varepsilon/2.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, rezultă că $(\forall)\,\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\,n_\varepsilon'\in\mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\,n>n_\varepsilon'$ avem:

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}.$$

Deci, pentru $(\forall)\,\varepsilon>0$ și $(\forall)\,n>\max\,(n_\varepsilon,\,n_\varepsilon')$ avem:

$$\frac{|a_1+a_2+\ldots+a_n|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=0$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1-x+x_2-x+\ldots+x_n-x}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-x\right)=0$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=x.$$

Reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, ..., $x_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$; atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ nu are limită pe cînd:

$$y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\text{ dacă }n=2k\\ \frac{n+1}{2n}\text{ dacă }n=2k+1\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}.$$

1.203. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un şir strict crescător şi divergent la* $+\infty$, *să se demonstreze că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_{n-m}}=\frac{x^{m+1}}{x-1}.$$

Soluţie. Avem identitatea:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_{n-m}}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_{n-m+1}}{x_{n-m}}$$

de unde prin, trecere la limită, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_{n-m}}=x^m\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_n}=$$

$$=x^m\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x^{m+1}}{x-1}.$$

1.204. *Să se demonstreze că dacă:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=x,\ x>0,\ x_n>0,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x.$

Soluţie. Avem:

$$\sqrt[n]{x_n}=\sqrt[n]{\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}}{\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=x.$$

1.205. *Să se demonstreze că:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^k\right)=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

(Marcel Chiriţă, G.M.B. 11445)

Soluţie. Aplicînd teorema lui CESARO—STOLZ pentru şirurile de termeni generali:

$$a_n=1^k+2^k+\ldots+n^k,\ b_n=n^{k+1}$$

obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{k+1},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Pe baza acestui rezultat obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^k\right)=\sum_{k=0}^{m}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}i^k}{n^{k+1}}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

1.206. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i=\alpha\in\mathbf{R}.$$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}ia_i=0.$$

Soluție. Notăm $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ și observăm că:

$$\sum_{i=1}^{n}ia_i=ns_n-\sum_{i=1}^{n-1}s$$

Deci:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}i\cdot a_i=\frac{ns_n-(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})}{n}=$$

$$=s_n-\frac{s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}}{n}.$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ia_i=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}}{n}=$$

$$=\alpha-\lim_{n\to\infty}\frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)-(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})}{(n+1)-n}=$$

$$=\alpha-\lim_{n\to\infty}s_n=\alpha-\alpha=0.$$

(Am aplicat teorema CESARO-STOLZ).

1.207*. *Fie șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *care are limită. Să se demonstreze că*

a°). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

b°). *Dacă* $x_n>0$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Soluție. a°). Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbf{R}$, atunci, considerînd în teorema lui TOEPLITZ, $p_{nk}=\dfrac{1}{n}$, $(\forall)\,n,\ k\in\mathbf{N}^*$, obținem:

$$t_n=\sum_{k=1}p_{nk}x_k=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

b°). Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbf{R}_+$ atunci punînd în teorema lui TOEPLITZ:

$$p_{nk}=\frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\quad(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\},\ n\in\mathbf{N}^*$$

obținem:

$$t_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Cazul $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ îl tratăm separat astfel:

b'). Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ și atunci din teorema lui TOEPLITZ, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = 0,$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = +\infty.$$

Într-adevăr, dacă în teorema lui TOEPLITZ înlocuim $p_{nk} = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iar în loc de x_n punem $\frac{1}{x_k}$ obținem că:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} \cdot \frac{1}{x_k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

și deci $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

a'). Deoarece pentru $(\forall)\ x_n > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

Ținînd seama de b') din $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ rezultă că:

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

1.208 *Fie şirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu* $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Soluţie. Avem:

$$\sqrt[n]{n! \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1(2x_2)(3x_3)\dots(nx_n)} \leqslant \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n}$$

şi dacă ţinem seama că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n} = 0$$

(v. problema 1.206) rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i} = 0.$$

1.209. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln\left(e + \sin\frac{\alpha}{n}\right)}{\ln\ln\left(e + \sin\frac{\beta}{n}\right)}$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}^*$.

Soluţie. Dacă $\alpha = 0$ atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$a_n = \frac{\ln\ln\left(e + \sin\frac{\alpha}{n}\right)}{\ln\ln\left(e + \sin\frac{\beta}{n}\right)} = 0$$

şi deci, în acest caz, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}^*$ atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln \left(e + \sin \frac{\alpha}{n}\right)}{\ln \ln \left(e + \sin \frac{\beta}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \left(1 + \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}\right)\right)}{\ln \left(1 + \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \left(\left(1 + \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}\right)\right)^{\frac{1}{u_n}}\right)^{u_n}}{\ln \left(\left(1 + \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}\right)\right)^{\frac{1}{v_n}}\right)^{v_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}\right)}{\ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \left(\left(1 + e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{w_n}}\right)^{w_n}}{\ln \left(\left(1 + e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1}{t_n}}\right)^{t_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{n}}{\sin \frac{\beta}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{\frac{\beta}{n}}{\sin \frac{\beta}{n}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Am notat mai sus:

$$u_n = \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}\right), \quad v_n = \ln \left(1 + e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}\right),$$

$$w_n = e^{-1} \sin \frac{\alpha}{n}, \quad t_n = e^{-1} \sin \frac{\beta}{n}.$$

1.210. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un şir de numere reale definit astfel:*

$$x_0 = 5, \; x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 11}, \; (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că $x_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Soluţie. Avem:

$$x_{n+1} - 2x_n = \sqrt{3x_n^2 - 11}, \; (\forall)\; n \in \mathbf{N}$$

şi:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = \sqrt{3x_{n+1}^2 - 11}, \; (\forall)\; n \in \mathbf{N}$$

de unde, prin ridicare la pătrat, obținem:

$$x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n + 4x_n^2 = 3x_n^2 - 11, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

și:

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+2}x_{n+1} + 4x_{n+1}^2 = 3x_{n+1}^2 - 11, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Scăzînd ultimele două relații membru cu membru rezultă:

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) - x_n^2 = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n) = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

deci echivalent cu:

$$x_{n+2} = x_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N} \quad \text{sau} \quad x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Ținînd seama că $x_0 = 5$, $x_1 = 18$, din ultimele două relații rezultă prin inducție matematică $x_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

1.211. *Fie* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *termenii unei progresii aritmetice cu rația* $r \in \mathbf{R}_+^*$ *și primul termen* $x_1 = x \in \mathbf{R}_+^*$. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i x_{i+2}}{x_{i+1}^2}.$$

Soluție. Avem:

$$\ln \frac{x_i x_{i+2}}{x_{i+1}^2} = \ln x_i - 2 \ln x_{i+1} + \ln x_{i+2}$$

și deci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i x_{i+2}}{x_{i+1}^2} = \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - 2 \ln x_{i+1} + \ln x_{i+2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 2 \sum_{i=2}^{n+1} \ln x_i + \sum_{i=3}^{n+2} \ln x_i = \ln x_1 + \ln x_2 -$$

$$- 2 \ln x_2 - 2 \ln x_{n+1} + \ln x_{n+1} + \ln x_{n+2} = \ln \frac{x_1}{x_2} + \ln \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i\cdot x_{i+2}}{x_{i+1}^2}=\ln\frac{x_1}{x_2}+\ln\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\ln\frac{x_1}{x_2}+$$

$$+\ln\lim_{n\to\infty}\frac{x+(n+1)r}{x+nr}=\ln\frac{x_1}{x_2}+\ln 1=\ln\frac{x_1}{x_2}.$$

1.212. *Fie șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *astfel încît:*

$$x_n=a^n+a^{-n},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*,\ a\in\mathbf{R}^*$$

Să se arate că dacă $x_1\in\mathbf{Z}$ *atunci* $x_n\in\mathbf{Z}$ *oricare ar fi* $n\in\mathbf{N}^*$.

Soluție. Este evident că $x_n\in\mathbf{R}^*$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$. Într-adevăr, dacă am presupune că există $m\in\mathbf{N}^*$ astfel încît $x_m=0$ atunci ar însemna că $a^m+a^{-m}=0$ sau $a^{2m}+1=0$ ceea ce contrazice faptul că $a\in\mathbf{R}^*$. Avem:

$$x_2=a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=x_1^2-2\in\mathbf{Z},\ x_3=$$

$$=a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})=x_1^3-3x_1\in\mathbf{Z}.$$

Presupunem că $x_n\in\mathbf{Z}$; atunci $x_{n+1}=a^{n+1}+a^{-(n+1)}=$ $=(a^n+a^{-n})(a+a^{-1})-(a^{n-1}+a^{-n+1})=x_nx_1-x_{n-1}\in\mathbf{Z}$. Deci, conform principiului inducției complete, rezultă că $x_n\in\mathbf{Z}$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

1.213. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît* $a_1=x\in$ $\in[1,+\infty)$ *și:*

$$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2,\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

1°). *Să se arate că dacă* $x\in[1,2]$ *atunci șirul dat este monoton și mărginit și să se calculeze* $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2°). *Să se arate că dacă* $x>2$ *atunci șirul este nemărginit.*

Soluție. 1°). Avem:

$$a_{n+1}=(a_n-1)^2+1,\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Deoarece $a_1=x$ rezultă:

$$a_2=(x-1)^2+1,\ a_3=(a_2-1)^2+1=(x-1)^4+1.$$

$$a_4=(a_3-1)^2+1=(x-1)^8+1$$

și deci, prin inducție matematică, se demonstrează că:

$$a_n = (x-1)^{2^{n-1}} + 1, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

$x \in [1, 2] \Rightarrow (x-1) \in [0, 1]$ și deci:

$$1 \leqslant a_n = (x-1)^{2^{n-1}} + 1 \leqslant 2, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce probează că șirul dat este mărginit în cazul $x \in [1, 2]$.

Avem:

$$a_{n+1} - a_n = (x-1)^{2^n} - (x-1)^{2^{n-1}} = (x-1)^{2^{n-1}} \cdot$$

$$\cdot (x-1-1) = (x-2)(x-1)^{2^{n-1}} \leqslant 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

adică șirul este descrescător dacă $x \in [1, 2)$ și este constant dacă $x = 2$. Șirul dat fiind monoton și mărginit rezultă că este convergent și deci, dacă notăm $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci avem:

$$a = \lim_{n\to\infty} ((x-1)^{2^{n-1}} + 1) = 1 + \lim_{n\to\infty} (x-1)^{2^{n-1}} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [1, 2) \\ 2, \text{ dacă } x = 2. \end{cases}$$

2°). Avem:

$$a_n = (x-1)^{2^{n-1}} + 1 > (x-1)^{2^{n-1}}$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $x > 2$ atunci există $y \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $x = 2 + y$ și deci:

$a_n = (x-1)^{2^{n-1}} + 1 > (1+y)^{2^{n-1}}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$. Conform inegalității lui BERNOULLI avem:

$$(1+y)^{2^{n-1}} \geqslant 1 + y \cdot 2^{n-1} > y \cdot 2^{n-1}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$a_n > y \cdot 2^{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce ne arată că dacă $x > 2$ și atunci șirul dat este nemărginit.

1.214. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir definit astfel:*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N},$$

Să se arate că $a_n \in \mathbf{N}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Soluție. Deoarece $a_1 = 1$ și:

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

atunci $a_0 = 0 \in \mathbf{N}$. Avem:

$$a_{n+1} - 2a_n = \sqrt{3a_n^2 - 2}$$

deci:

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}\,a_n + 4a_n^2 = 3a_n^2 - 2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

sau:

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}\,a_n + a_n^2 + 2 = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

De aici rezultă că:

$$a_{n+2}^2 - 4a_{n+2}\,a_{n+1} + a_{n+1}^2 + 2 = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Scăzînd ultimele două relații obținem:

$$a_{n+2}^2 - 4a_{n+1}\,(a_{n+2} - a_n) - a_n^2 = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$(a_{n+2} - a_n)\,(a_{n+2} - 4a_{n-1} + a_n) = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

adică echivalent cu:

$$a_{n+2} = a_n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N} \vee a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

De aici, dacă ținem seama că $a_0 = 0$ și $a_1 = 1$ rezultă, prin inducție completă, că $a_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

1.215. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $x_n \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ *care verifică relația:*

$$4x_{n+1} = x_n^2 - 4\left(\sqrt{1 + x_n} - 1\right)^3.$$

Dacă $x_1 = a$, *să se exprime termenul general* x_n *în funcție de* a.

Soluție. Fie șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu:

$$b_n = \frac{1}{4}\, x_n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Cu această notație, relația de recurență a șirului $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ devine:

$$16\, b_{n+1} = 16 b_n^2 - 4\left(\sqrt{4b_n + 1} - 1\right)^3, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

echivalent cu:

$$4b_{n+1} = 4b_n^2 + (\sqrt{4b_n + 1} - 1)^3, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

adică echivalent cu:

$$b_{n+1} = b_n^2 + 2\left(\frac{\sqrt{4b_n + 1} - 1}{2}\right)^3, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Observăm că $\frac{\sqrt{4b_n + 1} - 1}{2}$ este rădăcină a ecuației:

$$z^2 + z - b_n = 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

și deci, notînd $y = \frac{\sqrt{4b_n + 1} - 1}{2}$, obținem că:

$$b_n = y^2 + y, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$b_{n+1} = (y^2 + y)^2 + 2y^3 = y^4 + y^2,$$

$$b_{n+2} = (y^4 + y^3)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{4y^4 + 4y^2 + 1} - 1}{2}\right)^3 =$$

$$= y^8 + 2y^6 + y^4 + 2 \cdot \frac{8y^6}{8} = y^8 + y^4, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Fie deci $b_1 = y^2 + y$ unde $y = \frac{\sqrt{4b_1 + 1} - 1}{2}$; atunci, prin inducție, rezultă că:

$$b_n = y^{2^n} + y^{2^{n-1}}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

adică:

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{4b_1 + 1} - 1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{4b_1 + 1} - 1}{2}\right)^{2^{n-1}}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

echivalent cu:

$$x_n = 4b_n = 4\left(\left(\frac{\sqrt{x_1 + 1} - 1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{x_1 + 1} - 1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 4\left(\left(\frac{\sqrt{a + 1} - 1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{a + 1} - 1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

1.216. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *o progresie aritmetică astfel încît* $x_1 \quad x \in \mathbf{R}^*$ *şi raţia* $r \in \mathbf{R}_+^*$. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{m+2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{m} x_{k+i} \right),$$

unde, $m \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie. Fiind îndeplinite condiţiile teoremei CESARO-STOLZ, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{m+2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{m} x_{k+i} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}\, x_{n+2}\, x_{n+3} \cdots x_{n+m+1}}{x_{n+1}^{m+2} - x_n^{m+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n + r)(x_n + 2r)(x_n + 3r) \cdots (x_n + (m+1)r)}{C_{m+2}^1 r x_n^{m+1} + C_{m+2}^2 r^2 x_n^m + \ldots + r^{m+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{m+1} \left(1 + \frac{r}{x_n}\right)\left(1 + \frac{2r}{x_n}\right) \cdots \left(1 + \frac{(m+1)r}{x_n}\right)}{C_{m+2}^1 r x_n^{m+1} + C_{m+2}^2 r^2 x_n^m + \ldots + r^{m+2}} = \frac{1}{(m+2)r}.$$

1.217. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *cu proprietatea că :*

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y), \ (\forall) x, y \in \mathbf{R}$$

şi fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un şir cu proprietatea că* $x_n \in \mathbf{R}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.
Să se demonstreze că dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)} = 0$$

atunci :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1 + f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = 0.$$

Soluție. Funcția $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $g(x) = \frac{x}{1+x}$, este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Într-adevăr, $(\forall)x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$, $x_1 < x_2$ avem:

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 + x_1x_2 - x_2 - x_1x_2}{(1+x_1)(1+x_2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)} < 0.$$

Deoarece $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ și:

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

rezultă că $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ are proprietatea că:

$$(g \circ f)(x+y) \leqslant g(f(x) + f(y)), \ (\forall)x, y, \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+y)}{1+f(x+y)} \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)+f(y)}, \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}.$$

Deoarece pentru orice $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$ avem $\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}$, rezultă că:

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)+f(y)} \leqslant \frac{f(x)}{1+f(x)+f(y)} + \frac{f(y)}{1+f(x)+f(y)} \leqslant \frac{f(x)}{1+f(x)} +$$

$$+ \frac{f(y)}{1+f(y)}, \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}.$$

Deci:

$$\frac{f(x+y)}{1+f(x+y)} \leqslant \frac{f(x)}{1+f(x)} + \frac{f(y)}{1+f(y)}, \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

echivalent cu:

$$(g \circ f)(x+y) \leqslant (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y), \ (\forall)x, y, \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ dat în enunț avem:

$$(g \circ f)(x_1 + x_2) \leqslant (g \circ f)(x_1) + (g \circ f)(x_2).$$

Presupunem că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant k$ avem:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (g \circ f)(x_i), \quad (2)$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} (g \circ f)(x_i). \tag{3}$$

Într-adevăr:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) = \frac{f\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + x_{k+1}\right)}{1 + f\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + x_{k+1}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + (g \circ f)(x_{k+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} (g \circ f)(x_i).$$

Cu aceasta am demonstrat că:

$$0 \leqslant (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (g \circ f)(x_i), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin trecere la limită după $n \in \mathbf{N}^*$ în ultima inegalitate și ținînd seama de enunț rezultă:

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (g \circ f)(x_i) = 0$$

echivalent cu:

$$\lim_{n \to \infty} (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

1.218. *Dacă* $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$, *să se determine șirurile* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de numere reale astfel încît:*

$$x_n^2 + x_n x_m + x_m^2 = \frac{a^n - a^m}{x_n - x_m}, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}, \ m \neq n, \ x_0 = 1.$$

(Ion Mateescu, Revista liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu)

Soluție. *Existența.* Relația din enunț ne arată că $(\forall) m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$, are loc $x_m \neq x_n$. Deci relația din enunț este echivalentă cu.

$$x_n^3 - x_m^3 = a^n - a^m, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}, \ m \neq n.$$

Ultima relație ne arată că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, definit prin $y_n = x_n^3 - a^n$ este un șir constant și deci $(\exists)b \in \mathbf{R}$ astfel încît $y_n = b$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ adică:

$$x_n^3 = a^n + b,\ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$x_n = \sqrt[3]{a^n + b},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $x_0 = 1$ rezultă că:

$$x_n = \sqrt[3]{a^n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Unicitatea. Presupunem că $(\exists)$ un șir $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relația din enunț și care este diferit de șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ adică $(\exists)k \in \mathbf{N}^*$ a.î. $x_k \neq z_k$. Avem:

$$x_k^3 - x_m^3 = a^k - a^m,\ (\forall)m \in \mathbf{N} - \{k\}$$

și:

$$z_k^3 - z_m^3 = a^k - a^m,\ (\forall)m \in \mathbf{N} - \{k\}$$

deci:

$$x_k^3 - x_0^3 = z_k^3 - z_0^3 =$$

echivalent cu:

$$x_k^3 = z_k^3$$

adică echivalent cu $x_k = z_k$, ceea ce este absurd.

1.219. *Fie* $p \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *un număr prim,* $a, b \in \mathbf{Z}^*$, $a > b\sqrt{p}$ *și* $u = a + b\sqrt{p}$. *Dacă:*

$$u^n = x_n + y_n\sqrt{p},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

(Liviu Pîrșan)

Soluție. Evident, $v = a - b\sqrt{p} > 0$ și atunci:

$$v^n = x_n - y_n\sqrt{p},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Rezultă că:

$$x_n = \frac{u^n + v^n}{2};\ y_n = \frac{u^n - v^n}{2\sqrt{p}},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și deci avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{p}\lim_{n\to\infty}\frac{u^n+v^n}{u^n-v^n}=\sqrt{p}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{v}{u}\right)^n}{1-\left(\frac{v}{u}\right)^n}=\sqrt{p}$$

unde am ținut seama că $0<v<u$.

1.220*. *Fie* $a, b\in\mathbf{R}_+^*$, $a<b$ *și* $f, g:[0, b]\to[0, b]$, $f(x)=\frac{a}{b}\cdot g(x)$ *unde:*

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{dacă } x\in[0, a]\\ b-x & \text{dacă } x\in(a, b].\end{cases}$$

Dacă pentru orice $x\in[0, b]$ *și orice* $n\in\mathbf{N}^*$ *notăm:*

$$a_n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f\circ f)}_{n\text{ ori}}(x)$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$.

(D.M. Bătineţu)

Soluție. Din $x\in[0, a]$ rezultă $f(x)=\frac{a}{b}x\in[0, a]$ deci $(f\circ f)(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^2 x$ și, prin inducție, obținem $a_n(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^n x$.

Dacă $x\in(a, b]$ atunci $f(x)=\frac{a}{b}(b-x)\in[0, a]$ și deci $(f\circ f)(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^2(b-x)$ și, prin inducție, rezultă:

$$a_n(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^n(b-x).$$

Deci:

$$0\leqslant a_n(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^n g(x)<\left(\frac{a}{b}\right)^n b,\quad (\forall)x\in[0, b],\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*$$

și atunci obținem:

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n(x)\leqslant 0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n(x)=0.$$

CAPITOLUL 2

PROBLEME PROPUSE

A. ENUNȚURI

2.1. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0.$$

2.2. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$.

2.3. Fie șirul $(x_n)_n \in \mathbf{N}$ definit astfel:

$$x_n = \frac{n^2}{2n^2+2}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Să se verifice că $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ și să se determine indicii $n \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10}$$

și indicii $n \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}.$$

2.4. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu:

$$x_n = \frac{3^n + (-3)^n}{3^n}$$

nu tinde către zero.

2.5. Să se verifice că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin:

$$x_n = n^{(-1)^n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

este nemărginit, dar nu tinde la $+\infty$.

2.6. Să se arate că dacă $|a| < 1$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0, \quad k \in \mathbf{N}.$$

2.7. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$x_n = 1 + (-1)^n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

nu are limită.

2.8. Să se arate, folosind definiția limitei unui șir, că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}.$$

2.9. Să se arate, folosind definiția limitei unui șir că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

unde termenul general este:

$$a_n = \frac{2n+1}{3n^2+4}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2.10. Să se arate, folosind definiția limitei unui șir, că: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, unde:

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

2.11. Să se arate, folosind definiția limitei unui șir, că: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ unde:

$$a_n = \frac{n^3+1}{-n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

2.12. Folosind definiția limitei unui șir să se verifice că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n+2} = \frac{1}{5}.$$

2.13. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de termen general $x_n = \sin n$ este divergent.

2.14. Să se demonstreze că:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{N}^*$ expresia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diferă de numărul e cu mai puțin de 0,001?

2.15. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin ix}{2^i}$$

este convergent.

2.16. Pornind de la definiție să se arate că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Să se determine un $m \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\left| \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{100}, \quad (\forall) n \geq m.$$

2.17. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu:

$$x_n = \left(\sin n \frac{\pi}{2}\right) n^5$$

este nemărginit și nu tinde către infinit.

2.18. Să se arate că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad a > 1.$$

2.19. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de numere întregi este convergent dacă și numai dacă este staționar.

2.20. Fie $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ șiruri cu:

$$u_n = a_n + b_n, \quad v_n = a_n \cdot b_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}$$

și propozițiile:

p_1: șirurile $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ au limită

p_2: șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ au limită

p_3: șirurile $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sînt convergente.

Este adevărat că:

$$a^\circ).\ p_1 \Rightarrow p_2?; \quad b^\circ).\ p_3 \Rightarrow p_2?$$

2.21. Se dă șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde $x_n > 0$ pentru care:

$$x_{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^2}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Notăm:

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton.

b°). Să se arate că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge către 0.

(Laurențiu Panaitopol, Concurs elevi, 1975).

2.22. Fie șirurile reale a_n, $b_n = [a_n]_*$, $c_n = a_n - b_n$, unde $[a_n]_*$ reprezintă partea întreagă a numărului real a_n, adică cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a_n.

Care din următoarele afirmații sînt adevărate?

a°). (a_n) crescător și convergent $\Rightarrow$ (b_n) și (c_n) convergente.

b°). (a_n) convergent $\Rightarrow$ (b_n) și (c_n) convergente.

c°). Există (a_n) convergent astfel încît (b_n) să fie divergent.

d°). Există (a_n) divergent astfel încît (b_n) să fie convergent.

2.23. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!} = 0.$$

2.24. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^n \cdot \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_{n-2 \text{ ori}}}\right).$$

2.25. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de termen general:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x + 2^{k-1}}{2^k}\right]_*$$

este convergent $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 1969, p. 408).

2.26. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel:

$$x_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a_i^2}\right)\cdot\ldots$$

unde:

$$a_n = a + (n-1)r, \quad (\forall)n \geqslant 1, \quad r>0, \quad a>1.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 10260).

2.27. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît:

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

unde $p_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(\forall)i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și $p_0 \in \mathbf{Z}_+$. Să se arate că acest șir este convergent.

2.28. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\right)^n.$$

2.29. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

este strict crescător, iar șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

este strict descrescător și mărginit inferior. Să se deducă de aici că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

2.30. Să se demonstreze că dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{n} = 1.$$

2.31. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere cu:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0,$$

Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

2.32. Un șir de numere reale $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este definit astfel:

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1), \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

a°). Se notează $u_n = v_n + 1$. Să se determine o relație între v_{n+1} și v_n și apoi să se exprime u_n și v_n în funcție de n.

b°). Știind că:

$$u_n = \frac{1}{2^n} + 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

c°). Să se determine cel mai mic întreg n_0 astfel ca pentru orice $n \geq n_0$ să avem $|u_n - l| < \frac{1}{104}$.

(Bacalaureat, Franța, 1971)

2.33. Se dă șirul:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2n^2 + 1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

și se cere:

a°). Să se studieze monotonia șirului.

b°). Folosind definiția limitei să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

c°). Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \notin \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)\right\}.$$

2.34. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $a_1 = 1$ și:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că:

$$\frac{a_n}{n} \in [1, \sqrt{3}], \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

2.35. Să se construiască un șir de numere raționale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietatea că:

Pentru $(\forall) p \in \mathbf{N}^*$ există un subșir al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent către $\frac{1}{p}$.

Să se demonstreze că orice astfel de șir conține un subșir care converge către zero.

(Admitere, Facultatea de matematică, București, 1973)

2.36. Să se determine limitele extreme ale șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de termen general:

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \cos\frac{2n\pi}{3}.$$

2.37. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a^n + b^n}{4a^n + 5b^n}$$

știind că $a > 0$, $b > 0$.

2.38. Să se determine limitele extreme ale șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}.$$

2.39. Se construiește șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel: a_1, a_2, a_3 sînt în progresie geometrică, a_2, a_3, a_4 în progresie aritmetică, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică și așa mai departe. Să se calculeze termenul general al șirului, în funcție de a_1, a_2 și n dacă $a_1 \neq 0$.

2.40. Să se determine toate șirurile care verifică condițiile:

$$a_{n+2} = \frac{na_n + 1}{a_n + n}$$

și $a_n \in \mathbf{Z}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(V. Matrosenco, G.M., 1973)

2.41. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel ca $x_1 = 0$ și:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Este șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent? Dar monoton?

2.42. Fie:

$$x_n = \frac{(-1)^n n + 1}{(-1)^n \cdot n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Este șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent? Dar monoton?

2.43. Se consideră șirul de triunghiuri $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unde $t_0 = ABC$ și unde $t_n = A_nB_nC_n$ se obține din $t_{n-1} = A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ în felul următor: A_n este intersecția bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B_{n-1} și C_{n-1}, B_n este intersecția bisectoarelor exterioare ale unghiurilor C_{n-1} și A_{n-1}, iar C_n este intersecția bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A_{n-1} și B_{n-1}. Să se exprime unghiurile A_n, B_n, C_n respectiv în funcție de A, B, C.

2.44. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termen general:

$$x_n = \sqrt{n^4 + 2n^2 + 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.45. Să se calculeze:

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right).$$

2.46. Să se calculeze:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \ldots + n(n+3)}{n \cdot C_{n+2}^{n}}.$$

2.47. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4}\right).$$

2.48. Să se demonstreze că dacă șirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface condițiile:

$$a_{n+1}^2 < a_n^2$$

și:

$$a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n,$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, atunci șirul este convergent.

(D.M. Bătinețu)

2.49. Să se demonstreze că dacă șirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisface condițiile:

$$a_{n+1}^5 + a_n^5 < 1 < a_{n+1} + a_n; \quad a_{n+1}^3 < a_n^3,$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, atunci șirul este convergent.

(D.M. Bătinețu)

2.50. Să se demonstreze că dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisface condiția:

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = c, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

unde $k \in \mathbf{N}^*$, și $c \in \mathbf{R}$ sînt constante, atunci șirul este periodic.

2.51. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ unde $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = 9^{x_n}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că ultimele două cifre ale lui x_2 scris în baza 10 sînt aceleași cu ultimele două cifre ale lui x_1 scrise în baza 10. Care sînt aceste două cifre?

(Olimpiada matematică, Anglia)

2.52. Se dau două parabole cu axele paralele care se taie în A_0 și B_0. Pe una dintre parabole se iau punctele A_1, A_2, ..., A_{2n}, iar pe a doua punctele B_1, B_2, ..., B_{2n} astfel încît:

$$A_iA_{i+1} \parallel B_iB_{i+1}, \quad (\forall)i \in \{1, 2, ..., 2n-1\}.$$

Să se demonstreze că:

$$A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0.$$

2.53. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ așa încît:

$$1 \leqslant a_n < a_{n+1}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

și cu ajutorul lui se formează șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît $b_0 = 1$ și $b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Să se rezolve ecuația:

$$b_x \cdot b_y = b_{xy}.$$

(D.M. Bătinețu)

2.54. Fie $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{u}{v}$, $u \in \mathbf{Z}$, $v \in \mathbf{Z}^*$ și fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît:

$$x_n = (u^2 + v^2)^n \cos na, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că $x_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

(Maria Giurgiu)

2.55. Fiind date șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de numere reale, să se arate că dacă există $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ și dacă $x = ay$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ atunci $x = y$.

Să se determine x, dacă $x = by$, oricare ar fi $b \in \mathbf{R}_+^* \cup \{1\}$.

2.56. Să se arate că un șir de numere naturale care nu are limita $+\infty$ conține cel puțin un subșir constant.

(Laurențiu Panaitopol)

2.57. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale cu proprietățile:

(a°). $\Delta x_n \cdot \Delta x_{n-1} < 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$;

(aa°). $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = 0$.

Este șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent?

2.58. Dacă $a_0 = 0$ și:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

să se exprime termenul general al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ în funcție de $n \in \mathbf{N}$.

2.59. Să se exprime în funcție de n termenul general al șirului $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$u_1 = \alpha, \quad u_2 = \beta, \quad u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} u_i, \quad (\forall)n \geqslant 3.$$

2.60. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^2+3n+1}-an\right),\quad a\in\mathbf{R}.$$

2.61. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}=0.$$

a°). Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=0.$$

b°). Reciproca este adevărată?

(Concurs elevi, 1977)

2.62. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$x_n=\frac{A_0n^k+A_1n^{k-1}+\ldots+A_k}{B_0n^m+B_1n^{m-1}+\ldots+B_m},\quad A_0,\ B_0\in\mathbf{R}_+^*,\quad k,\ m\in\mathbf{N}^*$$

și: $B_0n^m+B_1n^{m-1}+\ldots+B_m\neq 0,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\dfrac{A_0}{B_0}, & \text{dacă } m=k\\ 0, & \text{dacă } m>k\\ +\infty\cdot\operatorname{sign}\dfrac{A_0}{B_0}, & \text{dacă } m<k\end{cases}$$

2.63. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^3+2}\cdot\sin(n!)+\frac{n}{n^2+2}\cdot\frac{n^2}{2n+1}\right).$$

2.64. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n!},\quad k\in\mathbf{N}^*-\{1\}.$$

2.65. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

2.66. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(p+i)!}{i!}, \quad \text{unde } p \in \mathbf{N}.$$

(Gheorghe Strefchi, G.M. 1979, 17623)

2.67. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} \quad \text{unde } a \in \mathbf{R}.$$

2.68. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$x_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2.69. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+^*.$$

2.70. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

2.71. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[27]{2} \cdots \sqrt[3^n]{2}).$$

2.72. Dacă $a \in \left[\frac{1}{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$ să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}.$$

2.73. Fie $k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și $a \in \left[\frac{1}{1+\sqrt[k]{2}}, +\infty\right)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$ unde:

$$x_n = \frac{\sqrt[k]{n!}}{(a+\sqrt[k]{1})(a+\sqrt[k]{2})\cdots(a+\sqrt[k]{n})}.$$

2.74. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}\cdot (n!)^3}{(3n)!}}.$$

2.75. Să se calculeze:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3 - 8}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1}.$$

2.76. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n-3}\right).$$

2.77. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1+9n}}{(1+a^n)(1+2a^{2n})(1+3a^{3n})(1+4a^{4n})}, \quad a \in \mathbf{R}_+^*.$$

2.78. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

$$x_n = \frac{(-1)^n n^5}{n^4+2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

2.79. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$x_n = (0{,}1936)^n \cdot n \cdot \sin\sqrt{n^3+1} + \frac{4n(n-1)}{(n+1)(2n+1)} + (0{,}1978)^n \cdot \frac{n^2}{n+1}.$$

2.80. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n\cdot n!}.$$

2.81. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt{n^2+n+1} - 3\sqrt{n^2-n+1}}{n}.$$

2.82. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}).$$

2.83. Fiind date șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$a_n=\ln(n!),\ b_n=\ln n^n,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

2.84. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

$$x_n=(n+1)^{\alpha+\frac{1}{n+1}}-n^{\alpha+\frac{1}{n}}$$

știind că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și $\alpha\in(0,\ 1]$.

2.85. Să se calculeze:

$$x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{n^m},\quad m\in\mathbf{R}.$$

2.86. Să se calculeze:

$$x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+1}{4n^2+8n+2}\right)^n.$$

2.87. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde $a_n=a_1+(n-1)r$, iar $a_1>0$, $r>0$. Cu ajutorul acestui șir construim șirul $(A_n)_{n\geq 2}$ dat de termenul general:

$$A_n=\ln\left(1-\frac{r^2}{a_2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{r^2}{a_3^2}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{r^2}{a_n^2}\right).$$

a°). Să se calculeze A_n.

b°). Să se arate că:

$$A_n<\frac{r}{a_n}+\ln\frac{a_1}{a_2},\quad(\forall)n\geq 2$$

c°). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

2.88. Se dau șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+2)!},\quad y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k^2-2k-1}{((k+1)!)^2},\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2}{y_n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^n\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{y_n^n}.$$

2.89. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ unde:

$$a_n=\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}.$$

2.90. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sin\frac{nx+1}{n}-\sin x\right).$$

2.91. Să se determine șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietățile:

$$x_{n+1}\geqslant x_n,\ x_{n+2}\geqslant x_n,\ x_{n+1}\cdot x_{n+2}>0,$$

$$(x_{n+1}+x_{n+2})\cdot x_n=2x_{n+1}\cdot x_{n+2},\quad (\forall)n\in\mathbf{N},\ x_0=1936.$$

2.92. Să se calculeze limita șirului de termen general:

$$x_n=(1+a+a^2)(1+a^3+a^6)\ldots(1+a^{3^n}+a^{2\cdot 3^n})$$

unde a este un parametru real.

2.93. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt două șiruri astfel încît $a_0,\ b_0>0$ și:

$a_{n+1}=a_n+r_1,\ b_{n+1}=b_n+r_2,\ (\forall)n\in\mathbf{N},\ r_1,\ r_2>0$ iar $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este definit astfel:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{a_k^q+b_k^q}},\quad k,\ p\in\mathbf{N}^*,\ p<k,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

2.94. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir definit astfel:

$$x_1 \in \mathbf{R}_+^*, \quad x_n = n(a + x_{n-1}), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

cu $a \in \mathbf{R}_+$. Dacă:

$$y_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a}{x_i}\right), \quad n \in \mathbf{N}^*$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(D. M. Bătinețu)

2.95. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n^3-1} [\sqrt{i}]_*^2}{n^4},$$

unde $[x]_*$ este partea întreagă a lui x.

2.96. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x]_* + \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_*}{n}$$

unde $x \in \mathbf{R}$.

2.97. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(1 + a^{i+1})\ (1 + a^{i+2})}, \quad a \in \mathbf{R}^* - \{1\}.$$

2.98. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

2.99. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots + (3n-2)^3}{(1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2))^2}.$$

2.100. Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e \cdot n!) = 2\pi.$$

2.101. Să se calculeze:

$$a = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(\sin^2(n!\,\pi x)\right).$$

2.102. Fie $m \in \mathbf{N}^*$ și:

$$M_m = \left\{(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_{k+i} = 1, \quad (\forall)k \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

Să se demonstreze că pentru orice m dat, mulțimea M_m conține un singur șir convergent, a cărui limită se cere.

(Concurs elevi, 1978)

2.103. Să se calculeze:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{x \operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4} + 1}; \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

2.104. Să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ai cărui termeni verifică relația:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\sqrt{1+a_{n-1}} - \sqrt{1-a_0^2}\cdot\sqrt{1-a_{n-1}}\right),$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, unde $a_0 \in [0, 1]$.

2.105. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de termen general:

$$a_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{C_{k+m}^{k}}; \quad k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.106. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}.$$

2.107. Fie $a \in (1, +\infty)$ și $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ unde:

$$x_n = \frac{1}{1+a^{n+1}} + \frac{1}{a+a^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a^n+a^{n+1}}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Să se calculeze $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.108. Să se calculeze:

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$$

unde:

$$a_i \in \mathbf{R}_+^*, \quad (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

2.109. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_{n+1}}{a_n^3}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sînt termenii strict pozitivi ai unei progresii aritmetice.

2.110. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right).$$

2.111. Dacă:

$$a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1} - \ln\sqrt{4n},$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2.112. Să se arate că oricare ar fi $a, b \in (0, \infty)$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^a+2^a+\ldots+n^a} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^b+2^b+\ldots+n^b}.$$

2.113. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și pentru orice $m, n \in \mathbf{N}$ să notăm $d(m, n)$ dreapta de ecuație:

$$a_nx + a_my + 1 = 0.$$

Să se determine șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ știind că $a_0 = 1$, șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu termenul general $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ este convergent și are limita diferită de zero, iar:

$$d(m, n) \cap d(m+1, n+1) = \emptyset, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}.$$

2.114. Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $c \in \mathbf{N}$, să se calculeze limita șirului avînd termenul general:

$$u_n = (an^c + bc^n)^{\frac{1}{n}}.$$

2.115. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2 (n+a)}{n^k}}, \quad a, k \in \mathbf{N}^*.$$

2.116. Dacă se notează:

$$\pi_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{(2i-1)(2i+1)}$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{\pi}{2} \text{ (Formula lui WALLIS[1])}.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}},$$

2.117. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right), \quad (\forall p \in \mathbf{R}_+^*).$$

2.118. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sin^m \pi \sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a}$$

unde $m \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, $a \in \mathbf{R}$.

2.119. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), \quad x \in \mathbf{R}_+^*.$$

2.120. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

[1] Wallis, John (1616–1703) — matematician englez

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}.$$

2.121. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir astfel încît:

$$a_{n+1}=a_n+r,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*;\quad a_1,\ r\in\mathbf{R}_+^*,$$

să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}.$$

2.122. Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu termenul general:

$$a_n=\left(\frac{(k+n+1)\ (k+n+2)\dots(k+n+k)}{(n+1)\ (n+2)\dots(n+k)}\right)^m$$

unde $k\in\mathbf{N}^*$ și $m\in\mathbf{R}_+$, să se studieze natura acestui șir.

2.123. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu termenul general:

$$x_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{3+\sqrt{i}}$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.124. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir convergent și $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$; atunci șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu:

$$y_n=\frac{1}{2^n}(x_0+C_n^1x_1+\dots+C_n^nx_n)$$

este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x$.

2.125. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 2}$, $(y_n)_{n\geq 2}$, $(u_n)_{n\geq 2}$ astfel încît:

$$x_n=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}-1};\quad y_n=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}+1};\quad u_n=x_n-y_n;\quad (\forall)n\geq 2.$$

Să se demonstreze că șirul $(u_n)_{n\geq 2}$ nu este convergent.

2.126. Se consideră şirul de funcţii:

$$f_0(x) = e^x$$
$$f_1(x) = f_0(x + h) - f_0(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x) = f_{n-1}(x + h) - f_{n-1}(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

unde h este o constantă reală.

a°). Să se exprime $f_n(x)$ cu ajutorul lui $f_0(x)$ şi h.

b°). Să se studieze convergenţa şirului cu termenul general $a_n(x) = \frac{f_n(x)}{e^n}$.

(Bucur B. Ionescu, G.M., 14878)

2.127*. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$; $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît $x_n \in \mathbf{R}_+^*$; $y_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietăţile:

a°). Şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict monoton şi nemărginit.

b°). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = d \in \mathbf{R}_+^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = m \in \mathbf{R}_+^*$.

Să se calculeze, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, unde $b_n = \sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}$, $n \geqslant 2$.

(D. M. Bătineţu)

2.128. Se dă şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{0! + 1!} + \frac{1}{1! + 2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)! + n!}.$$

a°). Să se calculeze termenul general a_n;

b°). Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent;

c°). Să se demonstreze că există egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} n(n!) \ln a_n = \lim_{n\to\infty} a_n^{(n+2)!}.$$

2.129. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

și pentru $(\forall)k \in \mathbf{N}^*$ se consideră șirul $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$b_n^{(k)} = \frac{n}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k-1}+(n-k+1)\sqrt{k}}.$$

a°). Să se arate că:

$$a_n \leqslant b_n^{(k)}, \quad (\forall)k \leqslant n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). Folosind definiția limitei să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ are limită.

(Marcel Țena)

2.130. Se dă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ prin relația de recurență $a_{n+1} = x^{\frac{a_n}{x}}$ unde $a_1 = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 1$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător, mărginit și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.131. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N} - \{0, 1, 2\}$, ecuația:

$$x^n - nx + 1 = 0$$

are două rădăcini pozitive a_n și b_n cu proprietățile: $0 < a_n < 1 < b_n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N} - \{0, 1, 2\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

(Revista Matematika, Bulgaria, 1976)

2.132. Să se arate că șirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \cdot C_{2n}^n$$

este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.133. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu termenul general:

$$a_n = \frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

a°). Să se arate că termenul general al şirului se poate scrie astfel:

$$a_n = f(n) - f(n+1), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

unde $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, a.î.:

$$f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

cu A şi B constante reale care se cer a fi determinate.

b°). Să se arate că şirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este convergent şi să se determine $\lim_{n \to \infty} b_n$.

c°). Să se calculeze limita şirului $(c_n)_{n \geq 1}$, unde:

$$c_n = b_n^n \cdot 2^n.$$

2.134. Să se găsească termenul general al şirului dat de relaţia:

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - 1} - \frac{1}{\sqrt[n]{a_n} - 1} = 1, \quad a_1 = 2, \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

(Maria Elena Panaitopol, G.M., 15600).

2.135*. Se dau şirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ şi propoziţiile:

p_1 : Şirul $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător şi nemărginit.

p_2 : $(\exists) \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A$.

p_3 : $(\exists) \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Se ştie că $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow p_3$ (teorema CESARO-STOLZ).

Este adevărat că $p_1 \wedge p_3 \Rightarrow p_2$? (Reciproca teoremei CESARO-STOLZ).

2.136. Fie şirul:

$$a_n = \left(\frac{(a+n)!}{n!\, n^a} \right)^n,$$

unde a este un număr natural.

1°). Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

2°). Dacă notăm $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, să se demonstreze că:

$$f(1)\cdot f(2)\cdot \ldots f(a) = \sqrt[3]{f(a)^{a+2}}.$$

2.137. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left(\ln \sin\frac{\pi}{2n} + \ln \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \ln \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$$

2.138. Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este dat prin:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i+1)^m - (2i-1)^m}{(4i^2-1)^m}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

unde $m \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.139. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ cu:

$$f(x) = \frac{(C_{n+1}^n)^{x-a} - (C_n^{n-1})^{x-a}}{b^x - b^a}$$

unde $b \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$. Se consideră şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde: $u_n = n \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Să se arate că şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

2.140. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = [x]_* \sin \pi x.$$

Dacă pentru orice număr natural k notăm cu m_k valoarea minimă a funcţiei $f(x)$ pe intervalul $[k, k+1)$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ unde:

$$s_n = \sum_{k=1}^{2n} 2^{m_k} - n.$$

2.141. În mulțimea matricilor pătratice de ordinul doi cu elemente numere reale considerăm șirul $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență:

$$6A_{n+3} = 11A_{n+2} - 6A_{n+1} + A_n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N} \text{ și:}$$

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}; \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix};$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

2.142. Fiind date șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definite prin relațiile de recurență:

$a_n = a_{n-1} + n(15n - 1)$, $b_n = b_{n-1} + n(3n - 1)$, $a_0 = b_0 = 0$,

dacă se notează:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} b_i, \quad n \in \mathbf{N}$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sigma_n}$.

(D.M. Bătinețu, G.M.B, 9821)

2.143. Se consideră șirul $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, unde:

$$u_n = a + (n - 1)r, \quad a, r > 0$$

și notăm:

$$s_n(a, r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n(a, r)}{u_n}$.

(Mihai Coconea)

2.144. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir strict crescător și nemărginit să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n}.$$

2.145. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{(n+1)\sqrt[n]{n!}}.$$

2.146. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k}{k(k+1)}.$$

2.147. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și:

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k!\, x_1 \cdot x_2 \ldots x_k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant a.$$

2.148. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir astfel încît $x_n \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, iar șirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ este convergent, atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Reciproca este adevărată?

2.149. Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent la $a > 0$ și $a_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

2.150. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir strict crescător și divergent la $+\infty$. Să se demonstreze că dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x \in \mathbf{R} - \{1\}$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{x_n} = \frac{x}{x-1}.$$

2.151. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir strict crescător și divergent la $+\infty$ și dacă există:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x \in \mathbf{R}^*,$$

atunci există și:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

2.152. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $a_n \in \mathbf{R}_+$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, este convergent atunci și șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$, este convergent.

2.153. Să se calculeze:

a°). $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\sigma_n\right)^n$,

unde:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

b°). $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2.154. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}.$$

2.155. Să se calculeze:

a°). $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}$; b°). $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$.

2.156. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2\cdot 3^{j-1}}$.

2.157. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k+2)}.$$

2.158. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n\in\mathbf{R}^*$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$, astfel încît oricare ar fi $m, n\in\mathbf{N}$, sistemul:

$$\begin{cases} a_{n+1}x+a_{n+1}y+1=0\\ a_mx+a_ny+1=0\end{cases}$$

nu este compatibil determinat.

Să se determine șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ știind că $a_0=1$, iar șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $b_n=\frac{a_n}{3^n}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\in\mathbf{R}^*$.

2.159. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\in\mathbf{R}_+^*$ definită prin:

$$f(x)=\frac{a^{3x}+b}{a^{2x}+a},\quad a\in\mathbf{R}_+^*,\ b\in\mathbf{R}$$

și cu ajutorul ei se formează șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu:

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Să se determine termenul general al șirului și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ în cazul $b=n$.

2.160. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ se definește astfel:

$$a_1=a+b,\quad a_2=a^2+ab+b^2$$

și:

$$a_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & 0\ldots 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & 0 & 0\ldots 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & ab & 0\ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1\ a+b & \end{vmatrix};\ a,b\in\mathbf{R}^*,\ a\neq b.$$

Dacă $c=\begin{cases}a, & \text{pentru } |a|>|b|\\ b, & \text{pentru } |a|<|b|\end{cases}$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{c^n}$.

2.161. Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este definit prin $a_1 = 5$, $a_2 = 19$ şi:

$$a_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{3^n}$.

2.162. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir astfel încît:

$$x_n = \prod_{i=0}^{k} (n + a + i), \quad a > 0,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x_j}$.

2.163. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir convergent de numere reale pozitive şi dacă $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir cu proprietatea că $b_1 > 0$ şi:

$$b_{n+1} = b_n + r, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \ r > 0,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, unde:

$$u_n = \frac{a_1}{nb_1} + \frac{a_1 + \sqrt{a_1a_2}}{nb_2} + \frac{a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{nb_3} + \\ + \frac{a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}}{nb_n}.$$

2.164. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{[x]_*^2 + [x]_*} = 1$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$ şi prin $[x]_*$ am notat partea întreagă a lui x.

2.165. Să se demonstreze că dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k+1]{x_n} = \sqrt[2k+1]{x},\ k \in \mathbf{N}^*.$$

2.166. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}$, unde $x \in \mathbf{R}_+^*$.

2.167. Fie:

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{n}{3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n+1)}.$$

Să se arate că $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să i se calculeze limita.

(Marcel Chiriță)

2.168. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*-\{1\}}$ astfel încît:

$$x_n = n + 1 - \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}\right),\ (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2.169. Fie $a \in [1, \infty)$, $r \in \mathbf{R}_+^*$ și:

$$a_n = a + (n-1)r,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

iar $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ astfel încît:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ;\ \text{dacă } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} a_i, & \text{dacă } n \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$$

și

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{rf(k-1) + f(k)} + \frac{r-1}{f(k+1)}\right),\quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

a°). Să se calculeze termenul general al șirului $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

b°). Să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

c°). Să se arate că dacă $a_1 = 1$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n f(n) \ln b_n - \lim_{n\to\infty} b_n^{f(n+2)} = 0.$$

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 10569)

2.170*. Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit cu:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a\in\mathbf{R}_+$$

iar $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir astfel încît $x_0\in\mathbf{R}_+^*$ și:

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{1+ba_nx_n^2},\quad (\forall)n\in\mathbf{N},\ b\in\mathbf{R}_+^*$$

și dacă $\lim_{n\to\infty}a_nx_n=x\in\mathbf{R}$, atunci $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

(D.M. Bătinețu)

2.171. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale astfel încît:

$$a_{n+1}-4a_n+4a_n^2=0,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}.$$

Să se determine toate valorile lui $a_0\in\mathbf{R}$ astfel încît $a_{1977}=1$.

2.172. Fiind dat șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$0\leqslant x_{m+n}<x_m+x_n,\quad (\forall)m,\ n\in N^*.$$

Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ există.

2.173. Fie $k\in\mathbf{R}_+^*$ și $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+k},\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*,$$

iar $x_1=1$. Să se exprime termenul general în funcție de n și k.

2.174. Se dă $k\in\mathbf{Z}$ și $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît $a_0=a_1=1$ și:

$$a_n=\frac{a_{n-1}^2+k}{a_{n-2}},\quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*-\{1\}.$$

Să se arate că $a_n\in\mathbf{Z}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

2.175. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 0}$ cu proprietatea că $a_0>0$ și:

$$a_n=\sqrt{\alpha a_{n-1}+\beta}$$

oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$, unde $\alpha,\ \beta>0$. Să se demonstreze că dacă există $m\in\mathbf{N}^*$ astfel încît $a_m^2-\alpha a_m-\beta<0$,

atunci șirul dat este convergent. Să se calculeze în acest caz $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(Maria Giurgiu)

2.176*. Fie $k \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $\beta \in [1, +\infty)$ și $\beta > \alpha^k - \alpha$. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit în felul următor:

$$a_0 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt[k]{\beta + a_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}$$

este monoton și mărginit.

(D.M. Bătinețu)

2.177. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde:

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \quad a \in [0, 1].$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2.178. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ termenii unei progresii aritmetice cu rația r și fie:

$$S_n = a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m.$$

a°). Calculîndu-se diferența $a_{k+1}^p - a_k^p$ să se stabilească identitatea valabilă pentru orice număr natural p:

$$a_{n+1}^p - a_1^p = C_p^1 r S_{p-1} + C_p^2 r^2 S_{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} r^{p-1} S_1 + C_p^p r^p S_0.$$

b°). *Reciproc*, dacă identitatea de la a°) este valabilă pentru orice n și orice p, atunci numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formează o progresie aritmetică cu rația r.

c°). Să se deducă expresiile pentru S_1, S_2, S_3, precum și suma expresiei:

$$E_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n, \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

2.179. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir astfel încît:

$$x_{n+1} = x_n + r, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Se așază termenii șirului în forma unui triunghi, astfel:

$$x_1$$
$$x_2,\ x_3$$
$$x_4,\ x_5,\ x_6$$
$$x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1°). Cu ce termen începe linia a $2n$ — a?

2°). Să se demonstreze că dacă $x_1 = 1$ și $r = 2$ atunci suma termenilor de pe orice linie este un cub perfect.

3°). Dacă $x_1 = 1$, $r = 2$ în ce linie se află situat numărul 21716 și al cîtelea este?

2.180. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ unde $x_1 \geqslant 0$ și:

$$x_{n+1} = |x_n + 1|, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

2.181. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir astfel încît $x_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n + 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$.

2.182. Un șir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă:

$$\Delta^2 a_n = 0, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

2.183. Să se afle termenul general al șirului recurent $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit de relația de recurență:

$$u_n = u_{n-1} + 4u_{n-2} - 4u_{n-3}, \quad n \geqslant 3,$$

în condițiile inițiale: $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 9$.

2.184. Dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisface relaţia de recurenţă:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n + a_{n-1})(1 - a_n a_{n-1})}{(1 + a_n^2)(1 + a_{n-1}^2)}$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, atunci şirul este mărginit.

(D.M. Bătineţu, G.M., 16011)

2.185*. Fie $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir recurent de ordinul k, ai cărui termeni satisfac relaţia:

$$u_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{n+k-i}$$

oricare ar fi $n \geqslant m$. Din acest şir formăm şirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel: $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Să se demonstreze că şirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir recurent de ordinul $k+1$ şi să se găsească relaţia de recurenţă.

2.186. Să se determine termenii generali al şirurilor $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît:

a°). $a_n = a_{n-1}\cos x + \cos(n-1)x$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$,

$$a_1 = 1,$$

b°). $b_n = 2b_{n-1}\cos x - b_{n-2}$, $(\forall)n \geqslant 3$,

$b_1 = 1$, $b_2 = 2\cos x$ unde $x \in \mathbf{R}$ cu $\sin x \neq 0$.

2.187*. Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ şirul lui FIBONACCI, adică şirul definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ cu $x_1 = x_2 = 1$. Să se demonstreze că oricare ar fi şirul recurent de ordinul al doilea $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ pentru care:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci:

$$u_n = u_1 x_{n-2} + u_2 x_{n-1}$$

pentru orice $n \geqslant 3$.

2.188*. a°). Dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se defineşte prin $a_0 = 2$ şi:

$$a_{n+1} = 3a_n + 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

atunci:

$$2a_n = 5 \cdot 3^n - 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

b°). Dacă şirul de perechi de numere reale $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ se defineşte prin $(x_0, y_0) = (x, y)$ şi:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{1}{2}(x_n + y_n), \frac{1}{2}(x_{n+1} + y_n)\right), \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

atunci:

$$(x_n, y_n) = \left(x + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),\right.$$

$$\left. x + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right)\right), \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

(Matematika v škole, 1967)

2.189*. Se consideră şirurile de numere naturale $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ şi $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definite astfel:

$$x_0 = x_1 = 1, \; x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, \; (\forall)n \in \mathbf{N}^*; \; y_0 = 1, \; y_1 = 7,$$

$$y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, \; (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ atunci $x_m \neq y_n$.

(Olimpiada matematică, S.U.A., 1973)

2.190. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit de relaţia de recurenţă:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Fără a calcula efectiv pe a_n, să se precizeze relaţia de ordine ce leagă pe a_1 şi a_0, astfel încît şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ să fie convex, respectiv concav.

(Valeriu Mangu, Revista „514" a liceului „Nicolae Bălcescu")

2.191. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale diferite de 0. Să se arate că acest șir formează o progresie aritmetică, dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem relația:

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} = \frac{n-1}{x_1x_n}.$$

2.192. Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației:

$$x^3 + ax^2 + 3x - 1 = 0.$$

Fie:

$$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n,$$

iar:

$$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n.$$

Să se arate că:

$$S_n = \frac{a+4}{a+3}(s_0 - s_{n+1}) + \frac{a+1}{a+3}(s_1 - s_{n+2}) + s_2 - s_{n+3}.$$

Să se calculeze S_n și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ dacă $a = -3$.

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 8545)

2.193. Să se demonstreze că dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir convergent de numere pozitive, atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ unde:

$$x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \sqrt{a_i \cdot a_j}$$

este convergent.

2.194. Fie n un număr natural și $\left[\frac{n}{2}\right]_*$ cel mai mare număr întreg care se cuprinde în $\frac{n}{2}$. Dacă notăm:

$$u_n = \frac{(3+\sqrt{13})^{n+1} - (3-\sqrt{13})^{n+1}}{2^{n+2}\sqrt{13}}$$

să se demonstreze că:

$$u_n + u_{n-2} = 3^{\frac{(-1)^n-1}{2}}\left((-1)^n \cdot 13 \cdot u^{2\left[\frac{n}{2}\right]_*-1} - 13 \cdot \frac{(-1)^n-1}{2} u^{2\left[\frac{n}{2}\right]_*} + ((-1)^n \cdot 3 - 1)(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]_*}\right).$$

(D.M. Bătineţu, G.M.B., 8643)

2.195. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir definit astfel:

$$x_n = a + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

($x_0 = a > 0$, fixat). Să se arate că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

2.196. Să se demonstreze că dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisface condiţiile $a_{n+1}^2 < a_n^2$ şi $0 < a_{n+1} + a_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ atunci şirul este convergent.

(D.M. Bătineţu, G.M., 16374)

2.197. Fiind dat şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$(p+q)u_n = u_{n-1}^2 + pq, \quad 0 < p < q$$

şi cu $u_0 = a \in [0, +\infty)$, să se studieze monotonia şi convergenţa acestui şir în raport cu parametrul a iar în cazul cînd este convergent să se calculeze limita sa.

2.198. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$3a_{n+1} = a_n + a_{n-1}^2 + 3b, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

unde $a_0 \quad a_1 = 0$ şi $b \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Să se arate că $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi să se găsească limita sa.

2.199. Se consideră şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ unde:

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} + c, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

$u_0 = 3$, $u_1 = 2$ şi $a, b, c \in (0, +\infty)$.

Să se demonstreze că dacă:

$$2a + 3b + c < 2$$

atunci șirul este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n$.

2.200. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit de relația:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*, \ a_0 = a_1 = 0.$$

Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația:

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{a_n}{n(n-1)}}$$

este convergent și să i se calculeze limita.

2.201. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $x_1 \in (0, 1)$ și:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} y_n$.

(Olimpiada matematică, Ungaria)

2.202. Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin relația de recurență:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

2.203. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi:

$$p(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a°). Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, există o pereche unică de numere întregi (a_n, b_n) astfel încît polinomul:

$$q_n(x) = x^n - a_n x - b_n$$

să se dividă prin $p(x)$.

b°). Să se arate că numerele a_n și b_n satisfac relațiile de recurență:

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -2a_n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

c°). Să se arate că șirul cu termenul general: $x_n = a_n + b_n$ este convergent și să i se determine limita.

(Concurs elevi, 1973, Dan Radu)

2.204. Să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ definit astfel:

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad 0 < a < b, \quad a_n = a_{n-1}^{1-q} a_{n-2}^{q}$$

pentru $n \geqslant 2$, unde $-1 < q < 1$.

2.205. Fie x un număr real pozitiv. Definim șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel:

$$a_1 = \operatorname{arctg} x, \quad a_n = \operatorname{arctg} a_{n-1},$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

2.206. Să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, unde:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_{n+1} = \sqrt{ax_n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*, \quad a > 0.$$

2.207. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este definit astfel $a_0 = a$, $a_1 = b$ și

$$a_{n+2} = \frac{ka_{n+1} + a_n}{k+1}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

unde $k > 0$. Să se determine termenul general al șirului și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.208. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir definit astfel:

$$a_1 = 1, \quad a_n = n(1 + a_{n-1}), \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) = e.$$

2.209. Considerăm șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin relația de recurență:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

oricare ar fi $n > 3$ cu:

$$a_1 \in \left(1, \frac{9}{5}\right), \quad a_2 \in \left(2, \frac{81}{25}\right), \quad a_3 \in \left(4, \frac{729}{125}\right).$$

Să se arate că șirul $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 2}$ este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

2.210. Fiind dat **șirul** de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **strict** monoton, să se determine **șirurile de** numere reale $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît:

$$y_n^2 + y_n y_m + y_m^2 = \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m}, \quad (\forall)\, m,\ n \in \mathbf{N},\ m \neq n$$

și $y_0 = \sqrt[3]{x_0}$.

(D.M. Bătineţu)

2.211. Dacă $a = u + v\sqrt{2}$, $u, v \in Z_+^*$, $u > v\sqrt{2}$ și dacă notăm:

$$a^n = x_n + y_n\sqrt{2},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

(Mathematics Bulletin, Canada)

2.212*. Se dă $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $u_n \in [-1, 1]$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ și:

$$2x_{n+1} = x_n + 1 - (2x_n^2 - 3x_n + 1)u_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(D.M. Bătineţu)

2.213. Să se demonstreze că o mulțime $X \subset \mathbf{R}$ este mărginită dacă și numai dacă $(\forall)(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_n \in X$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și $(\forall)(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $y_n \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

2.214*. Fie $r \in (0, 2)$, $\mathbf{Z}_r = \{z \in \mathbf{R} \mid z = nr,\ n \in Z\}$ și pentru orice $x \in \mathbf{R}$ să notăm $[x]_r$ elementul $z \in \mathbf{Z}_r$ astfel

încît $z \leqslant x < z + r$. Fie $f: [0, r] \to [0, r]$, $f(x) = \frac{r}{2}\{x\}_r$ unde:

$$\{x\}_r = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{r}{2}\right] \\ r - x, & \text{dacă } x \in \left(\frac{r}{2}, r\right] \end{cases}.$$

Dacă pentru orice $x \in [0, r]$ și orice $n \in \mathbf{N}^*$ notăm:

$$a_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f)}_{n \text{ ori}}(x),$$

să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n(x) = 0$

(Bătinețu)

2.215*. Se dă șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu:

$$a_1 > 1, a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

unde $r \in \mathbf{R}_+^*$. Se formează șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu $x_1 \in \mathbf{R}_+^*$ și:

$$x_n = a_n(x + x_{n-1}), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

unde $x \in \mathbf{R}_+$. Dacă notăm:

$$y_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{x_i}\right), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și:

$$a = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_i},$$

să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

(D.M. Bătinețu)

2.1. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar. Avem:

$$\frac{3n^2}{n^3+1} = \frac{3n^3}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{3}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} < \frac{3}{n}.$$

Deci, dacă $\frac{3}{n} < \varepsilon$ atunci:

$$\frac{3n^2}{n^3+1} < \frac{3}{n} < \varepsilon$$

și deci, luînd $n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]_+$ rezultă:

$$\frac{3n^2}{n^3+1} < \varepsilon, \quad (\forall) n > n_\varepsilon$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0.$$

2.2. Avem:

$$2^n = (1+1)^n > C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

sau:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n(n-1)}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Prin urmare:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \leqslant 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

2.3. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar. Din $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ rezultă:

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

sau:

$$\frac{1}{2(n^2+1)} < \varepsilon$$

deci:

$$\frac{1}{2\varepsilon} < n^2 + 1$$

adică:

$$\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon} < n^2$$

rezultă că dacă luăm

$$n_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } 1-2\varepsilon < 0 \\ \left[\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}}\right]_* & \text{, dacă } 1-2\varepsilon \geqslant 0 \end{cases}$$

atunci $(\forall) n > n_\varepsilon$ avem $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n > n_\varepsilon$ să aibă loc:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Dacă $\varepsilon = \frac{1}{10}$ atunci $\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{1-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$ și deci

$$\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}} = 2 \text{ sau } n_\varepsilon = 2.$$

Deci, $(\forall)n>2$ avem $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10}$. Dacă $\varepsilon=\frac{1}{100}$ atunci:

$$\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{1-\frac{1}{50}}{\frac{1}{50}}=49$$

deci $\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}}=7\Leftrightarrow n_\varepsilon=7$ și atunci:

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100},\quad (\forall)n>7.$$

2.4. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ atunci $(\forall)\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n>n_\varepsilon$ are loc $|x_n|<\varepsilon$, (1). Vom demonstra că această afirmație este falsă.

Fie $\varepsilon=\frac{1}{3}\in\mathbf{R}_+^*$ atunci $(\forall)n\in\mathbf{N}$ avem:

$$x_{2n}=\frac{3^{2n}+(-3)^{2n}}{3^{2n}}=\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{2n}}=2>\varepsilon.$$

Deci, pentru $\varepsilon=\frac{1}{3}$ afirmația (1) este falsă și atunci rezultă că $(\exists)\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$ astfel încît $(\forall)n_1\in\mathbf{N}$, $(\exists)n>n_1$, cu proprietatea, $|x_n|>\varepsilon$ ceea ce este echivalent cu faptul că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu tinde spre zero.

2.5. Un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit dacă și numai dacă $(\exists)M\in\mathbf{R}_+^*$ astfel încît:

$$|x_n|<M,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}.$$

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este nemărginit dacă și numai dacă $(\forall)M\in\mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n\in\mathbf{N}$ astfel încît $|x_n|\geqslant M$.

În cazul nostru vom considera subșirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $y_n=x_{2n}=2n$ și atunci este evident că $(\forall)M\in\mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\,n\in\mathbf{N}$ astfel încît $y_n=2n\geqslant M$ (conform axiomei lui ARHIMEDE în mulțimea numerelor reale căci $\mathbf{R}$ este un spațiu *arhimedian*).

Deci șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este nemărginit, adică șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este nemărginit.

Să arătăm acum că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu tinde la $+\infty$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar; atunci, considerînd subșirul $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin:

$$z_n = x_{3n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

este evident că $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ deci $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|z_n| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n > n_\varepsilon.$$

Prin urmare, $(\exists) M \in \mathbf{R}_+^*$, $M = \varepsilon$ astfel încît în afara vecinătății $(M, +\infty)$ a lui $+\infty$ se află o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ adică $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu tinde la $+\infty$.

2.6. Este evident că pentru $k = 0$ avem $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ și atunci este necesar să analizăm cazul $k \in \mathbf{N}^*$.

Din $|a| < 1$ rezultă că $(\exists) b \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $|a| = \frac{1}{1+b}$ și atunci:

$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1+b)^n} =$$

$$= \frac{1}{1 + C_n^1 b + C_n^2 b^2 + \ldots + C_n^k b^k + C_n^{k+1} b^{k+1} + \ldots + C_n^n b^n} <$$

$$< \frac{1}{b^{k+1} C_n^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} \cdot \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k)}.$$

Rezultă că:

$$n^k |a|^n < \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} < \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{(n-k)^{k+1}}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} n^k |a|^n = 0.$$

2.7. Presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ar avea limită. Să notăm $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Deoarece $x_n = 0$ sau $x_n = 2$ rezultă că x este finit.

Fie $V_x = (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$, o vecinătate a lui x cu $0 < \varepsilon < 1$. Evident dacă $x_n \in V_x$ atunci $x_{n+1} \notin V_x$ deci $(\forall) n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ nu putem avea $x_n \in V_x$, $(\forall) n \geqslant n_\varepsilon$.

Prin urmare, șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ nu are limită.

2.8. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar. Avem:

$$\left| \frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n+3-3n-2}{3(3n+2)} \right| = \frac{1}{3(3n+2)} < \varepsilon$$

sau:

$$\frac{1}{3\varepsilon} < 3n + 2$$

deci:

$$\frac{1-6\varepsilon}{3\varepsilon} < 3n$$

sau:

$$n > \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Deci, luînd:

$$n_\varepsilon = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } \dfrac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} < 1 \\ \left[\dfrac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} \right]_+ & , \text{ dacă } \dfrac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} > 1 \end{cases}$$

atunci $(\forall) n > n_\varepsilon$ avem:

$$\left| \frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\left| \frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon, \quad (\forall) n > n_\varepsilon,$$

echivalent cu:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}.$$

2.9. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar; atunci:

$$\frac{2n+1}{3n^2+4} < \frac{2n+1}{3n^2-3} < \frac{2n+2}{3n^2-3} = \frac{2(n+1)}{3(n-1)(n+1)} =$$

$$= \frac{2}{3(n-1)} < \frac{1}{n-1}, \quad (\forall) n \geqslant 2.$$

Dacă $\frac{1}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n-1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\varepsilon} < n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} < n$; atunci $\frac{2n+1}{3n^2+4} < \varepsilon$ și deci, luînd $n_\varepsilon = \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right]_*$, rezultă că $(\forall) n > n_\varepsilon$ are loc $|a_n| < \varepsilon$.

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n > n_\varepsilon$ are loc $|a_n| < \varepsilon$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.10. Avem:

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Fie deci $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar; atunci $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ este echivalent cu $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$ sau $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$ și deci $|x_n| < \varepsilon$.

Deci, luînd $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]_*$, avem că $(\forall) n > n_\varepsilon$ are loc $|x_n| < \varepsilon$.

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n > n_\varepsilon$ are loc $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.11. Va trebui să demonstrăm că $(\forall) M \in \mathbf{R}^*$ atunci $(\exists) n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall) n > n_M$ are loc $a_n < M$. Avem:

$$a_n = \frac{n^2+1}{-n} < \frac{n^2}{-n} = -n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Fie $M \in \mathbf{R}_-^*$; atunci este evident, conform axiomei lui ARHIMEDE, că $(\exists) n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $n_M > |M|$ și deci $(\forall) n > n_M$ are loc $n > |M| \Leftrightarrow -n < -|M| = M$ $\Leftrightarrow a_n < M$.

Cum $M \in \mathbf{R}_-^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)M \in \mathbf{R}_-^*$, $(\exists)n_M \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n > n_M$ are loc $a_n < M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.12. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar; atunci:

$$\left|\frac{n+1}{5n+2} - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$$

dacă și numai dacă:

$$\frac{3}{5(5n+2)} < \varepsilon$$

sau:

$$\frac{3-10\varepsilon}{25\varepsilon} < n.$$

Rezultă că dacă luăm:

$$n_\varepsilon = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } 3-10\varepsilon \leqslant 0 \\ \left[\dfrac{3-10\varepsilon}{25\varepsilon}\right]_0 & , \text{ dacă } 3-10\varepsilon > 0 \end{cases}$$

atunci $(\forall)n > n_\varepsilon$ avem:

$$\left|\frac{n+1}{5n+2} - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n > n_\varepsilon$ are loc:

$$\left|\frac{n+1}{5n+2} - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n+2} = \frac{1}{5}.$$

2.13. Să presupunem că șirul $(\sin n)_{n\in\mathbf{N}}$ are limită. Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0.$$

Dar:

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cos n$$

și atunci din:

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0$$

rezultă $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$.

Din:

$$\sin 2n = 2 \sin n \cos n$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sin 2n = 0$.

Deoarece $(\sin 2n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un subșir al șirului $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ și am presupus că $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sin n$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0$.

Din $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ rezultă că:

$\lim_{n\to\infty} \sin^2 n + \lim_{n\to\infty} \cos^2 n = 0$ deci $0 + 0 = 1$, contradicție.

Deci, presupunerea că șirul $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită este absurdă și atunci șirul $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

2.14. Avem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$$

și deci rezultă că:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Din:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} < \frac{1}{1\,000}$$

rezultă $n > 3000$.

2.15. Vom folosi criteriul general al lui CAUCHY. Avem:

$$|x_m - x_n| \leqslant \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{|\sin mx|}{2^m} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^m} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}^*, \quad m > n.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar; din $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ obținem că pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$ unde putem lua:

$$n_\varepsilon = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } \varepsilon \geqslant 1 \\ \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]_* & , \text{ dacă } \varepsilon \in (0, 1) \end{cases}$$

Cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geqslant n > n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent.

2.16. Avem:

$$\left|\frac{n^2+2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3n^2 + 6 - 3n^2 - 1|}{3(3n^2+1)} = \frac{5}{3(3n^2+1)} < \frac{5}{9n^2}.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar. Dacă $\frac{5}{9n^2} < \varepsilon$, atunci evident și

$$\left|\frac{n^2+2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Are, de asemenea, loc șirul de echivalențe:

$$\frac{5}{9n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{9\varepsilon} < n^2 \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{5}{9\varepsilon}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}.$$

Deci, putem lua $n_\varepsilon = \left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]_*$ și cum $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon = \left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]_*$ astfel încît:

$$\left|\frac{n^2+2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon, \quad (\forall)n > n_\varepsilon$$

echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}.$$

Dacă, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ atunci $\frac{5}{9\varepsilon} = \frac{500}{9} = 55,(5)$ și deci $n_\varepsilon = [55,(5)]_* = 55$; prin urmare, putem lua $n = 55$.

2.17. Avem:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n = 4k \\ n^5, & \text{pentru } n = 4k+1 \\ 0, & \text{pentru } n = 4k+2 \\ -n^5, & \text{pentru } n = 4k+3. \end{cases}$$

De aici se observă că $(\forall)M \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n \in \mathbf{N}$, $n \in \{4k+1, 4k+2\}$ astfel încît $|x_n| = n^5 > M$, adică șirul este **nemărginit.**

Șirul nu are limita $+\infty$ deoarece în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află o infinitate de termeni ai șirului și anume termeni de forma $x_n = -n^5$ cu $n = 4k+3$.

2.18. Din $a > 1$ rezultă că $(\exists)b \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $a = 1 + b$. Deci:

$$a^n = (1+b)^n = 1 + C_n^1 b + C_n^2 b^2 + \ldots + C_n^{k-1} b^{k-1} + C_n^k b^k + \\ + C_n^{k+1} b^{k+1} + \ldots + b^n$$

și atunci:

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{C_n^{n-k-1} \cdot b^{k+1}} = \frac{n^k}{C_n^{k+1} \cdot b^{k+1}} = \\ = \frac{n^k \cdot (k+1)!}{b^{k+1} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)} = \\ = \frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n-k} \cdot \frac{1}{b^{k+1}}.$$

Prin trecere la limită obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \leqslant 0$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

2.19. Dacă șirul este staționar rezultă că $(\exists)m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n = x_m, \quad (\forall)n \geqslant m$$

și atunci rezultă că $(\exists) \lim_{n\to\infty} x_n = x_m$ adică șirul este convergent.

Fie acum șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de numere întregi care este convergent adică $(\exists)x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{Z}$.

Fie $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ un număr fixat; atunci, din convergența lui $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că pentru acest $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ dat, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon), \quad (\forall) n \geqslant n_\varepsilon.$$

Rezultă atunci că:

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon, \quad (\forall)n \geqslant n_\varepsilon$$

sau:

$$-\frac{1}{2} < x_n - x < \frac{1}{2}, \quad (\forall)n \geqslant n_\varepsilon$$

și cum $x_n - x \in \mathbf{Z}$ rezultă că:

$$x_n - x = 0, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*, \ n \geqslant n_\varepsilon$$

deci $x_n = x$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant n_\varepsilon$ ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este staționar.

2.20. a°). Nu este adevărat că $p_1 \Rightarrow p_2$. Într-adevăr fie:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad b_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

Este evident că șirurile $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt divergente, iar șirurile $u_n = 1$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, $v_n = 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ au limită, fiind constante.

b°). Cu același exemplu dat mai sus probăm că propoziția p_3 nu implică propoziția p_2.

2.21. a°). Avem:

$$a_1 = \frac{x_1}{1}, \quad a_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant \frac{x_1 + \frac{x_1}{1^2}}{2} = x_1 = a_1$$

deci $a_1 \geqslant a_2$. Să demonstrăm deci că $a_{n+1} \leqslant a_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Are loc șirul de echivalențe:

$$a_{n+1} \leqslant a_n \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + nx_{n+1} \leqslant n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +$$

$$+ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \Leftrightarrow nx_{n+1} \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (1)$$

Conform enunțului, avem:

$$x_{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^2}$$

și atunci inegalitatea (1) este adevărată $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Deci, șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este descrescător și, fiind minorat, $a_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ rezultă că este convergent, adică $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$.

b°). Deoarece $0 < x_{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^2} = a_n \cdot \frac{1}{n}$, prin trecere la limită, obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a \cdot 0 = 0.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.22. a°). Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, fiind convergent, este mărginit deci $(\exists)M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît:

$$|a_n| < M, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător rezultă că și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător și:

$$b_n \leqslant a_n < M, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

deci și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Deoarece $c_n = a_n - b_n$ este suma a două șiruri convergente rezultă că și c_n este convergent.

Deci $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent implică $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente. Deci această afirmație este adevărată:

b°). Această afirmație nu este întotdeauna adevărată. De exemplu, dacă:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

atunci $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent pe cînd $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent, iar $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este, de asemenea, divergent.

Într-adevăr:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2p \\ -1 & \text{dacă } n = 2p+1 \end{cases}$$

și:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} - b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{dacă } n = 2p \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{dacă } n = 2p+1 \end{cases}$$

Dacă însă $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$ atunci $b_n = 0$, $(\forall)n \geqslant 2$, iar $c_n = a_n$ și atunci toate șirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt convergente.

c°). Această afirmație este adevărată. În adevăr, fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; atunci după cum am arătat la punctul b°), șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent.

d°). Dacă $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^2}$, atunci $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent pe cînd $b_n = 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ deci $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent. Deci și această afirmație este adevărată.

2.23. Evident avem:

$$k! \leqslant n!, \quad (\forall) 1 \leqslant k \leqslant n$$

deci:

$$0 < \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!} \leqslant \frac{n \cdot n!}{(n!)(n+1)\ldots(2n)} = \frac{n}{(n+1)\ldots(2n)}.$$

Prin trecere la limită obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} = 0,$$

ceea ce demonstrează enunțul.

2.24. Dacă:

$$a_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ ori}} + \sqrt{3}}},$$

atunci, observînd că:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \sin\frac{\pi}{12}, \quad \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} = \sin\frac{\pi}{24},$$

se demonstrează prin inducție că:

$$a_n = 2^{n+1} \sin\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

2.25. Să arătăm că:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Fie $x \in \mathbf{R}$ fixat. Există atunci $n \in \mathbf{Z}$ și $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, a.î.,

$$x = n + \alpha \text{ sau } x = n + \alpha + \frac{1}{2}.$$

Dacă $x = n + \alpha$ atunci:

$$[x]_* = n,\ \left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[n + \alpha + \frac{1}{2}\right]_* = n,\ [2n]_* =$$
$$= [2n + 2\alpha]_* \quad 2n$$

deci

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*.$$

Dacă $x = n + \alpha + \frac{1}{2}$ atunci:

$$[x]_* = n,\ \left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [(n + 1) + \alpha]_* = n + 1,$$
$$[2x]_* \quad [(2n + 1) + 2\alpha]_* = 2n + 1$$

deci

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* \quad [2x]_* = [x].$$

Deci relația (1) este verificată. Din (1) avem:

$$\left[\frac{1}{2^k}(x + 2^{k-1})\right]_* = \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}\right]_* = \left[\frac{x}{2^{k-1}}\right]_* - \left[\frac{x}{2^k}\right]_*$$

deci:

$$a_n = \left([x]_* - \left[\frac{x}{2}\right]_*\right) + \left(\left[\frac{x}{2}\right]_* - \left[\frac{x}{2^2}\right]_*\right) + \ldots + \left(\left[\frac{x}{2^{n-1}}\right]_* - \left[\frac{x}{2^n}\right]_*\right) = [x]_* - \left[\frac{x}{2^n}\right]_*, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $x \geq 0$, există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ a.î.:

$$0 \leq \frac{x}{2^n} < 1, \quad (\forall) n \geq n_0$$

deci:

$$\left[\frac{x}{2^n}\right]_* = 0, \quad (\forall) n \geq n_0$$

și deci:

$$a_n = [x]_*, \quad (\forall) n \geq n_0.$$

Dacă $x < 0$, există $n_0 \in \mathbf{N}^*$, a.î.:

$$-1 \leqslant \frac{x}{2^n} < 0, \quad (\forall) n \geqslant n_0$$

deci:

$$\left[\frac{x}{2^n}\right]_* = -1, \quad (\forall) n \geqslant n_0$$

și deci:

$$a_n = [x]_* - 1, \quad (\forall) n \geqslant n_0.$$

Prin urmare:

$$a_n = \begin{cases} [x]_*, & (\forall) x \geqslant 0, \ n \geqslant n_0 \\ [x]_* - 1, & (\forall) x < 0, \ n \geqslant n_0 \end{cases}$$

deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent și:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} [x]_*, & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_+, \\ [x]_* - 1, & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_-^*. \end{cases}$$

2.26. Evident, avem:

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

deci:

$$1 > \frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2} > \ldots > \frac{1}{a_n} > \ldots > 0$$

și deci:

$$1 > \frac{1}{a_1^2} > \frac{1}{a_2^2} > \ldots > \frac{1}{a_n^2} > \ldots$$

Atunci:

$$0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1 - \frac{1}{a_2} < \ldots < 1 - \frac{1}{a_n} < \ldots < 1,$$

$$0 < 1 - \frac{1}{a_1^2} < 1 - \frac{1}{a_2^2} < \ldots < 1 - \frac{1}{a_n^2} < \ldots < 1$$

deci:

$$0 < \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right) < \left(1 - \frac{1}{a_2}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right) <$$

$$< \ldots < \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)\left(1 - \frac{1}{a_n^2}\right) < \ldots < 1,$$

De aici deducem:

$$0 < \prod_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)\left(1-\frac{1}{a_i^2}\right) < \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)\left(1-\frac{1}{a_i^2}\right) < 1$$

adică:

$$0 < x_{n+1} < x_n < 1, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

Prin urmare, șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton descrescător și mărginit încît $\lim_{n\to\infty} x_n$ există și este finită.

2.27. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton crescător. Într-adevăr, avem:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geqslant 0$$

adică:

$$x_{n+1} \geqslant x_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Șirul este și mărginit superior. Într-adevăr:

$$x_n < p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = p_0 + \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = p_0 + 1.$$

Fiind monoton și mărginit, șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent

2.28. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}}\right)^{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}} = e^{\pi}.$$

În mod analog se arată că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)^n = e^{\pi/2}$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\right)^n=\frac{e^{\pi}}{e^{\pi/2}}=e^{\pi/2}.$$

2.29. Avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}>$$

$$>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1$$

deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător. Totodată:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n}<$$

$$<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1$$

deci șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Mai departe se observă că $x_n<y_n$ ceea ce este echivalent cu:

$$0<y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}<\frac{e}{n}$$

și, prin urmare:

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}=0$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=e.$$

2.30. Știm că:

$$0 \leqslant \sin \frac{x}{2n} \leqslant \frac{x}{2n}$$

dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ și deci:

$$0 \leqslant \sin^2 \frac{x}{2n} \leqslant \frac{x^2}{4n^2}$$

echivalent cu:

$$0 \leqslant 2 \sin^2 \frac{x}{2n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2}$$

adică:

$$0 \leqslant 1 - \cos \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2}.$$

Înmulțind ultima inegalitate cu $\cos \frac{x}{n} \in (0, 1]$ obținem:

$$\cos \frac{x}{n} - \cos^2 \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2} \cdot \cos \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2}$$

echivalent cu:

$$\cos \frac{x}{n} - \cos^2 \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2}.$$

Cu aceasta procedăm analog și așa mai departe obținem că:

$$\cos^{i-1} \frac{x}{n} - \cos^i \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n^2}, \quad (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Prin adunarea ultimelor n inegalități obținem:

$$1 - \cos^n \frac{x}{n} \leqslant \frac{x^2}{2n}$$

și deci notînd, $u_n = \cos^n \frac{x}{n}$ obținem:

$$1 - u_n \leqslant \frac{x^2}{2n}$$

echivalent cu:

$$u_n \geqslant 1 - \frac{x^2}{2n}.$$

și deoarece $u_n \leqslant 1$ rezultă că:

$$u_n \in \left[1 - \frac{x^2}{2n},\ 1\right], \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \in \left[1 - \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n},\ 1\right] = \{1\}$$

adică $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

2.31. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$$

există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel ca:

$$|x_n - x_{n-2}| < \varepsilon, \quad (\forall)n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Evident, $(\forall)n \geqslant n_\varepsilon$ avem relația:

$$x_n - x_{n-1} = (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-4}) - \\ - \dots \pm (x_{n_\varepsilon+1} - x_{n_\varepsilon-1}) \mp (x_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon-1})$$

deci:

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant (n - n_\varepsilon) \cdot \varepsilon + |x_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon-1}|$$

și deci:

$$\left|\frac{1}{n}(x_n - x_{n-1})\right| \leqslant \frac{n - n_\varepsilon}{n} \cdot \varepsilon + \frac{1}{n} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

2.32. a'). Din:

$$u_n = v_n + 1$$

rezultă:

$$u_{n+1} = v_{n+1} + 1$$

și deci, înlocuind în relația de recurență a lui $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ obținem:

$$v_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(v_n + 2) = \frac{v_n}{2} + 1$$

echivalent cu:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n,$$

adică șirul $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie geometrică de rație

$$r = \frac{1}{2} \text{ și } v_0 = u_0 - 1 = 1.$$

Prin urmare:

$$v_n = \frac{1}{2^n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Deci:

$$u_n = v_n + 1 = 1 + \frac{1}{2^n}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

b°). Avem deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. Avem de probat că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n \geqslant n_0$ are loc $|u_n - 1| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon >$ arbitrar, atunci:

$$|u_n - 1| = \frac{1}{2^n} + 1 - 1 = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

deci:

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \Leftrightarrow -\log_2 \varepsilon < n \text{ deci:}$$

$$n_0 = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } \varepsilon \geqslant 1 \\ [-\log_2 \varepsilon]_*, & \text{dacă } \varepsilon \in (0, 1). \end{cases}$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar rezultă că am verificat că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

c°). Avem:

$$|u_n - l| = |u_n - 1| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{104} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 104 < 2^n \Rightarrow n \geqslant 7 \text{ deci } n_0 = 7.$$

2.33. a°). Vom arăta că șirul nu este monoton. Într-adevăr, există $m < n$ cu $a_m > a_n$ și $p < q$ cu $a_p < a_q$ și anume $m = 2k$, $n = p = 2k + 1$, $q = 2k + 2$.

b°). Fie $\varepsilon > 0$. Trebuie să arătăm că $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon, \quad (\forall) n \geqslant n_\varepsilon.$$

Într-adevăr:

$$|a_n| = \frac{n}{2n^2 + 1} < \varepsilon$$

dacă și numai dacă:

$$n < 2n^2\varepsilon + \varepsilon$$

echivalent cu:

$$2n^2\varepsilon - n + \varepsilon > 0$$

adică:

$$n \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{4}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{4}, +\infty\right)$$

de unde se vede că putem lua $n_\varepsilon = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{4}\right]_*$ adică șirul este convergent la zero.

c°). Are loc șirul de echivalențe:

$$a_n \notin \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow |a_n| \geqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{n}{2n^2 + 1} \geqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10n \geqslant 2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 10n + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in \left[\frac{5 - \sqrt{17}}{4}, \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right] \Leftrightarrow n = 1$$

deci $A = \{1\}$.

2.34. Evident:

$$a_n \in \mathbf{R}_+^*, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

implică:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$$

deci:

$$a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^2 > \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2n$$

echivalent cu:

$$a_{n+1}^2 > 2n + 1$$

deci:

$$a_{n+1} > \sqrt{2n+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem și:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$$

de unde:

$$a_{n+1}^2 \leqslant a_n^2 + 3,$$

deci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^2 \leqslant 3n + \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

echivalent cu:

$$a_{n+1}^2 \leqslant 3n + 1, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

de unde:

$$a_{n+1} \leqslant \sqrt{3n+1}.$$

În concluzie:

$$a_{n+1} \in (\sqrt{2n+1},\ \sqrt{3n+1}]$$

deci:

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \in \left(\sqrt{\frac{2(n+1)-1}{n+1}},\ \sqrt{\frac{3(n+1)-2}{n+1}}\right] \subset [1,\ \sqrt{3}]$$

și cum $a_1 = 1$ rezultă că:

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \in [1,\ \sqrt{3}].$$

2.35. Vom scrie șirul:

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

în care se observă că putem calcula, ținînd seama de regula sa de formare, pentru fiecare n cine este a_n (nu vom face

acest lucru aici). Șirul scris are proprietatea cerută întrucît conține subșirul constant $\left(\frac{1}{p}\right)$ pentru orice p.

Fie acum $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir cu proprietatea cerută. Pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$ există un subșir care converge către $\frac{1}{p}$, deci un subșir care are o infinitate de termeni în vecinătatea $\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p-1}\right)$, a lui $\frac{1}{p}$. Alegem un termen $a'_{n(p)}$ al acestui subșir:

$$\frac{1}{p+1} < a'_{n(p)} < \frac{1}{p-1}.$$

Termenii $a'_{n(p)}$ formează un șir (b_p), conținut în șirul dat și astfel încît $\lim\limits_{p\to\infty} b_p = 0$.

2.36. Deoarece:

$$x_{3n-2} < x_{3n-1} < x_{3n}$$

și deoarece șirurile $(x_{3n-2})_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(x_{3n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(x_{3n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt convergente rezultă că:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(3n-2)^2}{2(1+(3n-2)^2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^2}{1+(3n)^2} = 1.$$

2.37. Deosebim cazurile:

(1°). $a > b$;

(2°). $a < b$;

(3°). $a = b$.

Avem succesiv:

$$(1°).\ \lim_{n\to\infty} \frac{3a^n + b^n}{4a^n + 5b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}{4 + 5\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{3}{4},$$

căci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$.

(2°). $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a^n + b^n}{4a^n + 5b^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1}{4\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 5} = \dfrac{1}{5}$,

căci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$.

(3°). $\dfrac{3a^n + b^n}{4a^n + 5b^n} = \dfrac{4}{9}$

deci se obține un șir constant cu limita $\dfrac{4}{9}$.

2.38. Considerînd subșirurile $(x_{8n-j})_{n\in\mathbf{N}^*}$, $j \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$ constatăm că:

$$x_{8n-3} \leqslant x_n \leqslant x_{8n-6},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Dar:

$$x_{8n-3} = -\left(1 + \frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

și:

$$x_{8n-6} = \left(1 + \frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-3} = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = e + 1.$$

2.39. Deoarece a_1, a_2, a_3 sînt în progresie geometrică rezultă că $a_3 = \dfrac{a_2^2}{a_1}$. Deoarece a_2, a_3, a_4, sînt în progresie aritmetică obținem:

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = \frac{a_2(2a_2 - a_1)}{a_1}.$$

Deoarece a_3, a_4, a_5 sînt în progresie geometrică rezultă că:

$$a_5 = \frac{a_4^2}{a_3} = \frac{(2a_2 - a_1)^2}{a_1}.$$

Deoarece a_4, a_5, a_6 sînt în progresie aritmetică rezultă că:

$$a_6 = 2a_5 - a_4 = \frac{(2a_2 - a_1)(3a_2 - 2a_1)}{a_1}.$$

Deoarece a_5, a_6, a_7 sînt în progresie geometrică obținem:

$$a_7 = \frac{a_6^2}{a_5} = \frac{(3a_2 - 2a_1)^2}{a_1}.$$

Prin inducție completă se probează că:

$$a_{2k} = \frac{(ka_2 - (k-1)a_1)((k+1)a_2 - (k-2)a_1)}{a_1}$$

și:

$$a_{2k+1} = \frac{(ka_2 - (k-1)a_1)^2}{a_1}, \quad (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

2.40. Este evident că $a_1 \neq -1$ și atunci:

$$a_3 = \frac{a_1 + 1}{a_1 + 1} = 1, \quad a_5 = \frac{3 + 1}{3 + 1} = 1.$$

Presupunem $a_{2k+1} = 1$ și rezultă că:

$$a_{2k+3} = \frac{2k + 4}{2k + 4} = 1$$

și deci: $a_{2k+1} = 1$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$a_4 = \frac{2a_2 + 1}{2 + a_2} = 2 - \frac{3}{a_2 + 2}$$

și deoarece a_2, $a_4 \in \mathbf{Z}$ rezultă $a_2 + 2 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_2 \in \{-5, -3, -1, 1\} \Leftrightarrow a_4 \in \{-1, 1, 3, 5\}$.

Calculînd pe a_6 obținem că:

$$a_6 \in \left\{-1, 1, \frac{21}{9}, \frac{13}{7}\right\},$$

dar ultimele două nu convin problemei, deci $a_6 \in \{-1, 1\}$.

Dacă $a_{2k} = 1$ rezultă $a_{2k+2} = 1 \Leftrightarrow a_{2k} = 1$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $a_{2k} = -1$ rezultă imediat că $a_{2k+2} = -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_{2k} = -1$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$.

Deci, singurele șiruri posibile sînt:

$a_1, 1, 1, 1, \ldots, \ldots$; $a_1, -1, 1, -1, 1, \ldots, \ldots$ cu $a_1 \in \mathbf{Z} - \{1\}$.

241. Din relația dată avem succesiv:

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{2}, \quad x_3 = x_2 + \frac{1}{4}, \ldots$$

și:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Adunînd aceste egalități, obținem:

$$x_n = -\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}. \qquad (1)$$

Deci:

$$\left| x_n + \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

și astfel șirul este convergent avînd limita $-\frac{1}{3}$.

Monotonia. Din (1) rezultă că termenii de rang par sînt mai mici ca $-\frac{1}{3}$, iar cei de rang impar sînt mai mari ca $-\frac{1}{3}$. Deci este un șir oscilant în jurul valorii $-\frac{1}{3}$. Cei de rang par sînt crescători, iar cei de rang impar descrescători și astfel șirul în totalitatea sa nu este monoton.

242. Putem scrie $x_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ și deci $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$, adică $|x_n - 1| \to 0$ pentru $n \to \infty$ și deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Șirul este convergent avînd limita 1.

Monotonia. Pentru n impar, termenii șirului sînt mai mici ca 1, iar pentru n par, mai mari ca 1. Fie x_{2k-1}, x_{2k+1} doi termeni impari consecutivi. Avem:

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} > 0$$

deci $x_{2k+1} > x_{2k-1}$ și astfel șirul termenilor de rang impar este monoton crescător și mărginit superior de 1 cu limita 1.

Analog, se arată că termenii de rang par formează un șir descrescător mărginit inferior de 1, cu limita 1. Deci, în totalitatea sa, șirul nu este monoton.

2.43. Din triunghiul $A_nB_{n-1}C_{n-1}$ (fig. 2.43) rezultă că:

$$A_n = 180° - \frac{180° - B_{n-1}}{2} - \frac{180° - C_{n-1}}{2} = \frac{B_{n-1} + C_{n-1}}{2}$$

sau:

$$A_n = 90° - \frac{A_{n-1}}{2} = \frac{180° - A_{n-1}}{2}$$

Deci:

$$2A_n = 180° - A_{n-1}. \tag{1}$$

Dar:

$$2A_{n-1} = 180° - A_{n-2}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem relația de recurență:

$$2(A_n - A_{n-1}) = -A_{n-1} + A_{n-2}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \quad (\forall)n \geqslant 2, \tag{3}$$

unde $A_0 = A$, $A_1 = \frac{180° - A}{2}$.

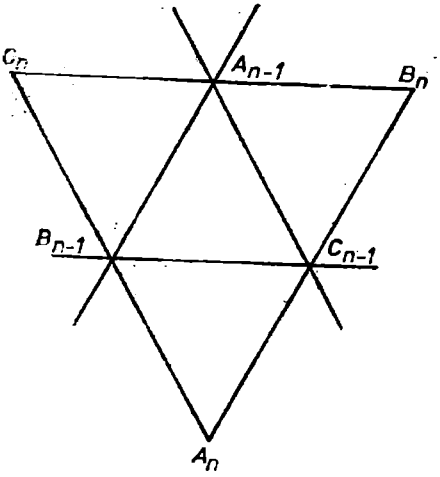

Fig. 2.43.

Pentru a exprima termenul general al relației (3) în funcție de A avem la dispoziție două metode:

a°). Prin inducție completă exprimînd unghiurile în radiani:

$$2^n A_n = \frac{\pi}{3} \cdot 2^n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^n A. \qquad (4)$$

Relația (4) se verifică pentru $n = 0$ și $n = 1$.

Presupunem că pentru orice $n \leqslant k$ relația (4) este verificată și o vom demonstra și pentru $n = k + 1$.

Din (3) avem:

$$2^{k+1} A_{k+1} = 2^k A_k + 2^k A_{k-1} = \frac{\pi}{3} \cdot 2^k + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} +$$

$$+ (-1)^k A + \frac{\pi}{3} \cdot 2^k + 2(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2(-1)^{k-1} \cdot A =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 2^{k+1} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} (2 - 1) + (-1)^{k-1} \cdot A(2 - 1) =$$

$$= \frac{\pi}{3} 2^{k+1} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + (-1)^{k-1} \cdot A = \frac{\pi}{3} \cdot 2^{k+1} +$$

$$+ (-1)^{k+2} \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^{k+1} A.$$

Cu aceasta formula (4) este verificată prin inducție.

b°). Ecuația caracteristică a relației de recurență (3) este

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Avem:

$$A_n = \alpha + (-1)^n \beta \frac{1}{2^n}$$

de unde, dacă impunem condițiile inițiale, obținem

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ și } \beta = A - \frac{\pi}{3}.$$

Deci:

$$2^n A_n = 2^n \alpha + (-1)^n \beta = \frac{\pi}{3} \cdot 2^n + (-1)^n \left(A - \frac{\pi}{3}\right)$$

adică relația (4). Analog obținem:

$$2^n B_n = \frac{\pi}{3} \cdot 2^n + (-1)^n \left(B - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$2^n C_n = \frac{\pi}{3} \cdot 2^n + (-1)^n \left(C - \frac{\pi}{3}\right).$$

2.44. Termenul general al șirului se mai poate scrie succesiv:

$$x_n = \frac{(n^4 + 2n^2 + 1) - (n^4 - n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + 1} + \sqrt{n^4 - n^2 + 1}} =$$

$$= \frac{3n^2}{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Rezultă deci că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3/2$.

2.45. Avem:

$$x = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

2.46. Deoarece:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \ldots + n(n+3) = \sum_{k=1}^{n} k(k+3) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+9)}{6} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3},$$

iar:

$$C_{n+2}^{n} = C_{n+2}^{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

rezultă că:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(n+3)}{nC_{n+2}^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \cdot \frac{2}{(n+2)(n+1)n} = \frac{2}{3}.$$

2.47. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-n^2}{n}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1-n^2}{n}=\frac{1}{2}.$$

2.48. Dacă vom arăta că șirul dat este monoton și mărginit, atunci conchidem că el este convergent.

1°). *Mărginirea*. Avem:

$$a_{n+1}^3+a_n^3<1<a_{n+1}+a_n,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

deci:

$$a_{n+1}^3<1-a_n^3 \text{ și } 1-a_n<a_{n+1},\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

prin urmare:

$$(1-a_n)^3<a_{n+1}^3<1-a_n^3,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

și deci:

$$1-3a_n+3a_n^2-a_n^3<1-a_n^3,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

de unde:

$$3a_n(a_n-1)<0,\ (\forall)n\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

În inegalitatea (1) sînt posibile două cazuri:

a°). $a_n<0,\ a_n-1>0,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$

deci:

$$a_n<0,\ a_n>1,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

ceea ce este o contradicție.

b°). $a_n>0,\ a_n-1<0,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$

deci:

$$a_n>0,\ a_n<1,\ (\forall)n\in\mathbf{N}$$

sau:

$$a_n\in(0,\ 1),\ (\forall)n\in\mathbf{N}, \tag{2}$$

adică șirul dat este mărginit.

2°). *Monotonia.* Deoarece $a_n \in (0, 1)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, rezultă că:

$$a_{n+1} + a_n > 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Însă:

$$a_{n+1}^2 < a_n^2, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

implică:

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și deoarece:

$$a_{n+1} + a_n > 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

rezultă din afirmația precedentă, că:

$$a_{n+1} - a_n < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} < a_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Cu alte cuvinte, șirul dat este strict descrescător.
Fiind monoton și mărginit, șirul este convergent.

2.49. Dacă vom demonstra că șirul este monoton și mărginit, va rezulta că este convergent.

Mărginirea. În adevăr:

$$a_{n+1}^5 + a_n^5 < 1 < a_{n+1} + a_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

implică:

$$a_{n+1}^5 < 1 - a_n^5 \text{ și } 1 - a_n < a_{n+1}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$(1 - a_n)^5 < a_{n+1}^5 < 1 - a_n^5, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

deci:

$$(1 - a_n)^5 < 1 - a_n^5, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

adică:

$$1 - 5a_n + 10a_n^2 - 10a_n^3 + 5a_n^4 - a_n^5 < 1 - a_n^5, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

sau încă:

$$5a_n(a_n^3 - 2a_n^2 + 2a_n - 1) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și deci:

$$5a_n(a_n - 1) \cdot (a_n^2 + a_n + 1 - 2a_n) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

iar aceasta este echivalentă cu:

$$5a_n(a_n - 1)(a_n^2 - a_n + 1) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

adică:

$$a_n(a_n - 1) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

prin urmare:

$$(a_n < 0 \text{ și } a_n - 1 > 0) \text{ sau } (a_n > 0 \text{ și } a_n - 1 < 0), \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

adică:

$$(a_n < 0 \text{ și } a_n > 1) \text{ sau } (a_n > 0 \text{ și } a_n < 1), \ (\forall)n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n \in (0, 1), \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

deci șirul este mărginit.

Monotonia. Avem:

$$a_{n+1}^3 < a_n^3, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$(a_{n+1} - a_n) \cdot (a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

adică:

$$(a_{n+1} - a_n)(2a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + 2a_n^2) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

sau încă:

$$(a_{n+1} - a_n)((a_{n+1} + a_n)^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2)) < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

deci:

$$a_{n+1} - a_n < 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și atunci șirul dat este strict descrescător.

Cu aceasta problema este rezolvată.

2.50. Deoarece relația enunțată este satisfăcută $(\forall)n \in \mathbf{N}$, rezultă că:

$$c = x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = x_{n+1} + x_{n+2} +$$

$$+ \ldots + x_{n+k} + x_{n+k+1}$$

deci:

$$x_n = x_{n+k+1}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și atunci șirul este periodic de perioadă $k + 1$.

2.51. Din:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

obținem:

$$(a+b)^n = a^2(a^{n-2} + C_n^1 a^{n-3}b + \ldots + C_n^{n-2}b^{n-2}) +$$
$$+ C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = a^2(a^{n-2} + C_n^1 a^{n-3}\cdot b + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-2}b^{n-2}) + nab^{n-1} + b^n.$$

Deci dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ atunci:

$$(a+b)^n = \mathcal{M}a^2 + nab^{n-1} + b^n. \tag{1}$$

Observăm că toți x_n sînt impari (un număr impar ridicat la o putere impară dă un număr impar).

Deci x_{n-1} este par și deci

$$(-1)^{x_{n-1}} = 1,\ (-1)^{x_n} = -1,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem de asemenea:

$$x_2 = 9^{x_1} = (10-1)^{x_1}$$

și atunci din (1) obținem:

$$x_2 = \mathcal{M}100 + x_1\cdot 10\cdot(-1)^{x_1-1} + (-1)^{x_1} = \mathcal{M}100 +$$
$$+ 9\cdot 10 - 1 = \mathcal{M}100 + 89, \tag{2}$$

adică x_2 scris în baza 10 se termină cu 89.

Dar:

$$x_{n+1} = 9^{x_n} = (10-1)^{x_n}$$

și deci ținînd seama de (1) rezultă:

$$x_{n+1} = \mathcal{M}100 + x_n\cdot 10\cdot(-1)^{x_n-1} + (-1)^{x_n} =$$
$$= \mathcal{M}100 + 10\cdot(\mathcal{M}100 + 89) - 1 = \mathcal{M}100 +$$
$$+ 10(\mathcal{M}100 + 80 + 9) - 1 = \mathcal{M}100 + 90 - 1 =$$
$$= \mathcal{M}100 + 89. \tag{3}$$

Deci dacă x_n se termină în scrierea zecimală cu 89 atunci și x_{n+1} se termină în scrierea zecimală cu 89.

Deoarece proprietatea este adevărată pentru $n = 2$ atunci conform principiului inducției complete, pentru $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, x_n se termină cu 89. De aici rezultă că x_3 și x_4 se termină cu 89 în scrierea zecimală.

2.52. Fie:

$$y = p_1x^2 + q_1x + r_1,\ y = p_2x^2 + q_2x + r_2$$

ecuațiile celor două parabole într-un sistem cartezian de coordonate xOy. Dacă notăm cu a_i, b_i abscisele punctelor A_i, B_i, $i \in \{0, 1, 2, ..., 2n\}$ atunci coeficientul unghiular al coardei A_iA_j este:

$$\frac{(p_1a_i^2 + q_1a_i + r_1) - (p_1a_j^2 + q_1a_j + r_1)}{a_i - a_j} = p_1(a_i + a_j) + q_1$$

iar al coardei B_iB_j este:

$$p_2(b_i + b_j) + q_2.$$

Din modul cum au fost luate punctele A_i, B_i rezultă că:

$$p_1(a_0 + a_1) + q_1 = p_2(b_0 + b_1) + q_2. \qquad (1)$$

$$p_1(a_1 + a_2) + q_1 = p_2(b_1 + b_2) + q_2. \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_1(a_{2n-1} + a_{2n}) + q_1 = p_2(b_{2n-1} + b_{2n}) + q_2. \qquad (2n)$$

Deoarece A_0B_0 este coardă comună rezultă că:

$$p_1(a_0 + b_0) + q_1 = p_2(a_0 + b_0) + q_2. \qquad (2n + 1)$$

Înmulțind relațiile (1), (3), ..., $(2n + 1)$ cu -1 și adunînd apoi relațiile obținute cu relațiile (2), (4), ..., $(2n)$, $(2n + 1)$ obținem:

$$p_1(a_{2n} + b_0) + q_1 = p_2(b_{2n} + a_0) + q_2.$$

Ultima relație ne arată că:

$$A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0.$$

2.53. Vom distinge două cazuri, după cum urmează:
1°). $a_1 > 1$. În acest caz se observă imediat că:

$$M = \{(1, n), (n, 1), n \in \mathbf{N}^*\} = (\{1\} \times \mathbf{N}^*) \cup (\mathbf{N}^* \times \{1\}) \subset \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = (\mathbf{N}^*)^2$$

este o mulțime de soluții pentru ecuația din enunț.

Vom demonstra că $(\forall)(x, y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* - M$ avem:

$$b_x \cdot b_y \neq b_{xy}.$$

Datorită comutativității înmulțirii numerelor naturale vom presupune fără a restrînge generalitatea, că $x \leqslant y$.

Fie deci $(x, y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* - M$, $x \leqslant y$; atunci vom arăta că:

$$b_{xy} > b_x \cdot b_y. \tag{1}$$

Într-adevăr:

$$b_{xy} = a_1 \cdot a_2 \dots a_x \cdot a_{x+1} \cdot a_{x+2} \dots a_y \cdot a_{y+1} \dots a_{xy},$$

iar:

$$b_x \cdot b_y = a_1 \cdot a_2 \dots a_x \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_x \cdot a_{x+1} \dots a_y.$$

Deci:

$$\frac{b_{xy}}{b_x \cdot b_y} = \frac{a_1 a_2 \dots a_x a_{x+1} \dots a_y a_{y+1} \dots a_{xy}}{a_1 a_2 \dots a_x a_1 a_2 \dots a_x a_{x+1} \dots a_y} =$$

$$= \frac{a_{y+1} \cdot a_{y+2} \dots a_{xy}}{a_1 a_2 \dots a_x}. \tag{2}$$

Deoarece $x > 1$, $y \geqslant x$, rezultă că $xy - y = y(x-1) > x$ și, deci, la numărătorul fracției (2) sînt mai mulți factori decît la numitor.

Totodată, ținînd seamă că $a_{y+j} > a_j$, $(\forall)j \in \{1, 2, \dots, x\}$, rezultă:

$$\frac{a_{y+j}}{a_j} > 1, \ (\forall)j \in \{1, 2, \dots, x\}$$

și, deci, din relația (2) obținem:

$$\frac{b_{xy}}{b_x b_y} > a_{x+1} \cdot a_{x+2} \dots a_{xy}.$$

Deoarece:

$$a_{x+k} > 1, \ (\forall)k \in \{1, 2, \dots, xy - x\}$$

rezultă că:

$$\frac{b_{xy}}{b_x b_y} > 1$$

adică:

$$b_{xy} > b_x b_y$$

și, deci, inegalitatea (1) este stabilită.

Deci, mulțimea soluțiilor ecuației din enunț în acest caz este M.

$a_1 = 1$. În acest caz ecuația mai admite ca soluții în afară de elementele mulțimii M și pe $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Prin urmare, în acest caz, soluția ecuației din enunț este $B = M \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$.

2.54. Vom face demonstrația prin metoda inducției matematice.

Etapa 1°). **Verificare.** Pentru $n = 0$, avem $x_0 = m^0 \cos 0a = 1 \in \mathbf{Z}$ unde $m = u^2 + v^2 \in \mathbf{Z}^*$.

Pentru $n = 1$, avem:

$$x_1 = m \cos a = m \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = m \cdot \frac{1 - \frac{u^2}{v^2}}{1 + \frac{u^2}{v^2}} =$$

$$= m \cdot \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} = \frac{m(v^2 - u^2)}{m} = v^2 - u^2 \in \mathbf{Z}.$$

Etapa 2°). **Presupunere.** Presupunem că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant k$ enunțul este verificat, adică:

$$n \in \mathbf{N},\ n \leqslant k,$$

implică:

$$x_n = m^n \cos na \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Etapa 3°). **Demonstrație.** Să demonstrăm că:

$$n = k + 1$$

implică:

$$x_{k+1} = m^{k+1} \cos (k + 1)a \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Într-adevăr:

$$\cos (k + 1)a = \cos ka \cos a - \sin ka \sin a,$$

$$\cos (k - 1)a = \cos ka \cos a + \sin ka \sin a,$$

de unde, prin adunare, obținem:

$$\cos(k+1)a + \cos(k-1)a = 2\cos ka \cos a$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\cos(k+1)a = 2\cos ka \cos a - \cos(k-1)a.$$

Înmulțim ultima egalitate cu m^{k+1} și rezultă:

$$x_{k+1} = 2(m^k \cos ka)(m\cos a) - m^2(m^{k-1}\cos(k-1)a)$$

echivalent cu:

$$x_{k+1} = 2x_k x_1 - m^2 \cdot x_{k-1}.$$

Ținînd seama de cele demonstrate la etapele 1 și 2, rezultă că $x_{k+1} \in \mathbf{Z}$.

Etapa 4. **Concluzie.** $(\forall)n \in \mathbf{N}$ implică $x_n \in \mathbf{Z}$.

Cu aceasta enunțul este complet demonstrat.

2.55. Dacă $x \in \mathbf{R}$ atunci este evident că $y \in \mathbf{R}$ și, din $x = ay$, $(\forall)a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ rezultă că $x = y = 0$.

Dacă $x = +\infty$ atunci este evident că $y = +\infty$, iar dacă $x = -\infty$, atunci $y = -\infty$.

Prin urmare, $x = y$ în condițiile în care $x = ay$, $(\forall)a \in \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$.

Dacă $x = by$, $(\forall)b \in \mathbf{R}_-^* \cup \{1\}$ atunci este evident că dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci $y \in \mathbf{R}$ și, deci $x = y = 0$.

Cazul $x = \pm\infty$ nu este admisibil deoarece avem $x = by$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_-^* \cup \{1\}$ și atunci dacă $x = +\infty$ și $b \neq 1$ avem $y = -\infty$, dar egalitatea $x = by$ este valabilă și pentru $b = 1$ adică $+\infty = -\infty$, contradictoriu. La fel rezultă că $x = -\infty$ duce la o contradicție. Prin urmare, în cazul $x = by$, $(\forall)b \in \in \mathbf{R}_-^* \cup \{1\}$ avem $x = y = 0$.

2.56. Cum șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu are limita ∞, rezultă că există $M \in \mathbf{N}$ astfel încît, în afara semidreptei (M, ∞), se află o infinitate de termeni ai șirului. Termenii șirului fiind numere naturale, înseamnă că în punctele 0, 1, 2, ..., M sînt plasați o infinitate de termeni ai șirului. Dar, punctele 0, 1, 2, ..., n sînt în număr finit. Rezultă că, în cel puțin unul dintre ele, sînt o infinitate de termeni ai șirului. Așadar, șirul conține un subșir constant.

2.57. Prin două exemple vom demonstra că există șiruri convergente cu proprietățile din enunț, dar există și șiruri divergente cu proprietățile din enunț.

Într-adevăr, dacă:

$$\Delta x_n = \frac{(-1)^n}{3^n},$$

atunci șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ satisface condițiile enunțului.

Pentru $n = 2k$ avem $\Delta x_n > 0$, iar pentru $n = 2k+1$ avem $\Delta x_n < 0$ ceea ce ne arată că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu este monoton.

Din:

$$\Delta x_k \quad x_{k+1} - x_k = \frac{(-1)^k}{3^k}, \quad (\forall) k \in \mathbf{N}^*$$

obținem prin însumare:

$$x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k}$$

de unde rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent, și:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k} = x_1 - \frac{1}{4}.$$

Să considerăm acum un șir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu proprietatea că:

$$\Delta x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1 \\ -\dfrac{1}{2(n-1)}, & \text{dacă } n = 2k \end{cases}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Acest șir are proprietățile din enunț.

Într-adevăr:

$$\Delta x_1 = 1, \ \Delta x_2 = -\frac{1}{2}, \ \Delta x_3 = \frac{1}{3}, \ \Delta x_4 = -\frac{1}{2\cdot 3},$$

$$, \Delta x_5 = \frac{1}{5}, \ \Delta x_6 = -\frac{1}{2\cdot 5}, \ \ldots, \ \Delta x_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)},$$

$$, \Delta x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \ldots .$$

Prin urmare:

$$\sum_{k=1}^{2n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{2n} (x_{k+1} - x_k) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = x_{2n+1} - x_1.$$

De aici rezultă:

$$x_{2n+1} = x_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}.$$

Analog, obținem:

$$x_{2n+2} = x_1 + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n-1}.$$

Deci subșirurile $(x_{2n+1})_{n \geq 1}$, $(x_{2n})_{n \geq 1}$ sînt nemărginite și:

$$\lim_{n \to \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} x_{2n} = +\infty$$

ceea ce arată că $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Cu aceasta am demonstrat că există șiruri convergente dar și șiruri divergente care satisfac enunțul.

2.58. Avem:

$$a_1 = -1, \ a_2 = 0, \ a_3 = -1$$

și, prin inducție matematică, rezultă că:

$$a_{2n} = 0, \ a_{2n+1} = -1, \ (\forall) \ n \in \mathbf{N}.$$

2.59. Avem:

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_n + \sum_{i=1}^{n-1} u_i = 2u_n, \ (\forall) \ n \geq 3,$$

de unde se deduce că:

$$u_{n+1} = 2^{n-2} \cdot u_3, \ (\forall) \ n \geq 3.$$

Ţinînd seama că:

$$u_3 = u_1 + u_2 = \alpha + \beta$$

rezultă că:

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \beta,\ u_3 = \alpha + \beta$$

prin urmare, avem:

$$u_{n+1} = 2^{n-2}(\alpha + \beta),\ (\forall)\ n \geqslant 3.$$

2.60. Dacă $a \in \mathbf{R}_-$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{2n^3 + 3n + 1} - an) = +\infty,$$

iar dacă $a \in \mathbf{R}_+^*$ atunci:

$$\sqrt[3]{2n^2 + 3n + 1} - an = \left(\sqrt[3]{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} - an^{\frac{1}{3}}\right) n^{2/3} =$$

$$= n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \sqrt[3]{2 + 3/n + 1/n^2} - a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{2n^2 + 3n + 1} - an) = -\infty.$$

2.61. a°) Vom considera inegalitatea lui CAUCHY-BUNEAKOVSKI[1]:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

care este valabilă oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$.

În particular pentru $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, inegalitatea devine:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

care se mai poate scrie sub forma echivalentă:

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}. \qquad (*)$$

Însă, prin ipoteză, şirul dat de termenul general:

$$a_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

[1] Buneakovski, Viktor Iakovlevici (1804 – 1889) – matematician rus.

este convergent către zero deci, ținînd seama de inegalitatea (*) și aplicînd criteriul majorării rezultă că șirul dat de termenul general:

$$b_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

este convergent către zero.

b°). Reciproca nu este adevărată. Pentru a justifica aceasta este suficient, să dăm un contraexemplu.

Fie $x_n = (-1)^n$. Avem că:

$$b_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{-1}{n}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 0,$$

dar:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = 1.$$

2.62. Avem:

$$x_n = \frac{n^h \left(A_0 + \frac{A_1}{n} + \ldots + \frac{A_h}{n^h}\right)}{n^m \left(B_0 + \frac{B_1}{n} + \ldots + \frac{B_m}{n^m}\right)}$$

de unde se observă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, & \text{dacă } m = k \\ 0, & \text{dacă } m > k, \\ +\infty \operatorname{sign}\left(\frac{A_0}{B_0}\right), & \text{dacă } m < k, \end{cases}$$

unde am ținut seama că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^p} = \begin{cases} 0, \text{ pentru} & p > 0 \\ a, \text{ pentru} & p = 0 \\ \infty \operatorname{sign} a, \text{ pentru} & p < 0. \end{cases}$$

2.63. Deoarece:

$$|\sin(n!)| \leqslant 1, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

rezultă că șirul de termen general $u_n = \sin(n!)$ este mărginit.

Observăm că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+2} = 0$$

și atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+2} \sin(n!) = 0.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+2} \sin(n!) + \frac{n}{n^2+2} \cdot \frac{n^2}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

2.64. Avem:

$$0 < \frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{1 \cdot 2 \ldots n} < \frac{n^k}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}$$

pentru $n > n_k$. De aici, prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$

2.65. Pentru $(\forall)\, n \geqslant 4$ avem:

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \ldots \frac{2}{n} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \ldots \frac{2}{3} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Deoarece $\frac{2}{3} < 1$ atunci $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ și deci din:

$$0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

2.66. Dacă notăm:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(p+i)!}{i!}, \quad b_n = n^{p+1}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci şirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ îndeplinesc condiţiile teoremei *Cesaro-Stolz*; (v. **3.27**), şi deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+p+1)!}{n!\,((n+1)^{p+1} - n^{p+1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)(n+p+1)}{C_{p+1}^1 n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots + C_{p+1}^{p-1} n + 1} =$$

$$= \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}.$$

2.67. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \cos\frac{a}{\sqrt{n}} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - 2\sin^2 \frac{a}{2\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{a}{2\sqrt{n}}}{\frac{a}{2\sqrt{n}}}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

2.68. Avem:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdots \frac{5+2(n-2)}{4+3(n-2)} \cdot \left(\frac{2-n}{4+3(n-1)}\right)$$

şi prin urmare, avem:

$$x_n - x_{n-1} < 0, \quad (\forall) n \geqslant 3$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_n < x_{n-1}, \quad (\forall) n \geqslant 3,$$

adică şirul este strict descrescător.

Deoarece şirul este strict descrescător şi mărginit inferior (termenii sînt pozitivi) rezultă că el este convergent adică $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$.

Avem însă:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2n+5}{3n+4}$$

şi deci, prin trecere la limită, obţinem $x = x\,\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.69. Dacă $\alpha \in (0, 1)$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}} = 0.$$

Dacă $\alpha = 1$ atunci:

$$x_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}} = \frac{1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

deci: $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Dacă $\alpha > 1$ atunci:

$$x_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}\left(1+\frac{1}{\alpha^{2n}}\right)} = \frac{1}{\alpha^n\left(1+\frac{1}{\alpha^{2n}}\right)},$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha^{2n}}} = 0.$$

2.70. Notînd:

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

obţinem:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

şi deci:

$$\frac{3}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

2.71. Avem:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\ldots\sqrt[3^n]{2}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=$$

$$=2^{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)}=2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\ldots\sqrt[3^n]{2}\right)=(\sqrt{2})^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\sqrt{2}.$$

2.72. Avem:

$$a+\sqrt{i}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\sqrt{i}\geqslant\sqrt{i+1},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\sqrt{i}\geqslant\sqrt{i+1}\Leftrightarrow\frac{1}{1+\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{i+1}-\sqrt{i}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$$

ceea ce este evident. Prin urmare:

$$0<\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\ldots(a+\sqrt{n})}\leqslant\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\ldots\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

de unde prin trecere la limită obținem că limita din enunț este zero.

2.73. Este evident că din:

$$a\geqslant\frac{1}{1+\sqrt[4]{2}}$$

rezultă că:

$$a+\sqrt[4]{i}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{i}\geqslant\sqrt[4]{i+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\sqrt[k]{\frac{1}{2}+1} \geqslant \sqrt[k]{i+1}-\sqrt[k]{i} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[k]{(i+1)^{k-1}}+\sqrt[k]{(i+1)^{k-2}i}+\ldots+\sqrt[k]{i^{k-1}}}.$$

Deci:

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\sqrt[k]{n!}}{\sqrt[k]{2}\cdot\sqrt[k]{3}\ldots\sqrt[k]{n}\cdot\sqrt[k]{n+1}} = \frac{1}{\sqrt[k]{n+1}}$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.74. Notînd:

$$u_n = \frac{3^n\cdot(n!)^3}{(3n)!}$$

obținem, prin trecere la limită, că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}\cdot(n!)^3}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{3n+3}\cdot((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^3\cdot(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{3^3}{3^3} = 1.$$

2.75. Avem:

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^3-8 = \frac{8n^3+12n^2+6n+1-8n^3}{n^3} = \frac{12n^2+6n+1}{n^3}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1 = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2}.$$

Deci: $x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^2+6n+1}{n^3}\cdot\frac{n^2}{2n+1} = 6.$

2.76. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n-3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}(n+3-n+3)}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{n^2-9}+\sqrt[3]{(n-3)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{9}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

2.77. Dacă $a < 1$ atunci avem:

$$0 < \frac{a^{10n}}{(1+a^n)(1+2a^{2n})(1+3a^{3n})(1+4a^{4n})} < a^{10n}$$

de unde rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{a^{10n}}{(1+a)^n(1+2a^{2n})(1+3a^{3n})(1+4a^{4n})} = 0.$$

Dacă $a = 1$ atunci:

$$u_n = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{120}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{120}.$$

Dacă $a > 1$ atunci avem:

$$u_n = \frac{a^{10n}}{a^{10n}\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(2+\frac{1}{a^{2n}}\right)\left(3+\frac{1}{a^{3n}}\right)\left(4+\frac{1}{a^{4n}}\right)}$$

de unde obținem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

2.78. Este evident că $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, are loc:

$$0 < \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{4}$$

de unde rezultă:

$$0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} \in (0,\ 1).$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}\right)^n = 0$$

și prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+2} (-1)^n n \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}\right)^n = 0.$$

2.79. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(0{,}1936)^n}\, n \sin \sqrt{n^3+1} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{4n(n-1)}{(n+1)(2n+1)}}_{2} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \underbrace{(0{,}1978)^n}_{0} \cdot \frac{n^2}{n+1}.$$

Dacă ținem seama că $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$ pentru $|a| < 1$ și că produsul, dintre un șir mărginit și un șir convergent la zero, converge și el la zero rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 + 2 + 0 = 2.$$

2.80. Fie:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$$

atunci avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} =$$

$$= \frac{2n+1}{3(n+1)} < \frac{2n+2}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1.$$

Deci șirul este strict descrescător și mărginit inferior ($a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$), prin urmare este convergent.

Fie, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Avem:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{3n+3}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N},$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă $a = \frac{2}{3} a \Leftrightarrow a = 0$.

2.81. Avem:

$$\frac{5\sqrt{n^2+n+1}-3\sqrt{n^2-n+1}}{n}=$$

$$=\frac{n\left(5\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-3\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{n}=$$

$$=5\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-3\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n^2+n+1}-3\sqrt{n^2-n+1}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(5\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-3\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=5-3=2.$$

2.82. Avem:

$$\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{n}\cdot\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}}=$$

$$=\frac{4\sqrt[3]{n}\cdot n}{n^{4/3}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}}.$$

Rezultă, prin trecere la limită, că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)=\frac{4}{3}.$$

2.83. Aplicăm teorema CESARO-STOLZ și obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)^{n+1}-\ln n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+\ln e_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln e_n}{\ln(n+1)}}=1,$$

unde $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\Rightarrow\ln e_n<\ln e=1.$

2.84. Aplicăm teorema CESARO-STOLZ pentru șirurile

$$a_n=n^{\alpha+\frac{1}{n}},\ b_n=n \text{ și obținem:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha+\frac{1}{n+1}}-n^{\alpha+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}x_n=l$$

despre care știm că există și este finită.

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot n^{\alpha-1}=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ dacă } \alpha\in(0,\ 1)\\ 1, \text{ dacă } \alpha=1.\end{cases}$$

2.85. Avem:

$$x=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{\sqrt[3]{n}}\right)^{\frac{n^m}{\sqrt[3]{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^m}{\sqrt[3]{n}}}=$$

$$=\begin{cases}1, \text{ dacă } m\in\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right)\\ e, \text{ dacă } m=\frac{1}{3}\\ +\infty, \text{ dacă } m\in\left(\frac{1}{3},\ +\infty\right).\end{cases}$$

2.86. Avem:

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3n+7}{4n^2+8n+2}\right)^{\frac{4n^2+8n+2}{3n+7}}\right)^{\frac{(3n+7)n}{4n^2+8n+2}} = e^{\frac{3}{4}}.$$

2.87. a°). Avem:

$$A_n = \sum_{i=2}^{n} \ln\left(1-\frac{r^2}{a_i^2}\right) = \sum_{i=2}^{n} \ln\frac{a_{i+1}\,a_{i-1}}{a_i^2} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (\ln a_{i+1} + \ln a_{i-1} - 2\ln a_i) = \sum_{i=3}^{n+1} \ln a_i + \sum_{i=1}^{n-1} \ln a_i -$$

$$- 2\sum_{i=2}^{n} \ln a_i = \ln a_1 - \ln a_2 - \ln a_n + \ln a_{n+1} = \ln\frac{a_1}{a_2} +$$

$$+ \ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\frac{a_1}{a_1+r} + \ln\frac{a_1+nr}{a_1+(n-1)r} =$$

$$= \ln\frac{a_1(a_1+nr)}{(a_1+r)(a_1+(n-1)r)}.$$

b): $A_n < \frac{r}{a_n} + \ln\frac{a_1}{a_2} \Leftrightarrow \ln\frac{a_1}{a_2} + \ln\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{r}{a_n} + \ln\frac{a_1}{a_2}$

ceea ce este echivalent cu:

$$\ln\left(1+\frac{r}{a_n}\right) < \frac{r}{a_n}$$

deci, echivalent cu:

$$\ln\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{r}} < 1$$

prin urmare echivalent cu:

$$\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{r}} < e;$$

ceea ce este evident.

c°). Avem:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \ln \frac{a_1}{a_2} + \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{a_1}{a_2} +$$

$$+ \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + nr}{a_1 + (n-1)r} = \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

2.88. Avem:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+2) - (k+1)}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)!} \right) =$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{n+1}{(n+2)!}.$$

De asemenea:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+1)^2 - k}{((k+1)!)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{(k!)^2} - \frac{k}{((k+1)!)^2} \right) = - \frac{n}{((n+1)!)^2}.$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right)^2}{-\frac{n}{((n+1)!)^2}} = - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = -1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^n \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^{2n}}{y_n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^n \left(-\frac{n+1}{(n+2)!}\right)^{2n}}{(-1)^n \frac{n^n}{((n+1)!)^{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{2n}} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}.$$

2.89. Pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ avem:

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

şi deci dacă vom considera şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu:

$$b_n = \cos 2\pi \sqrt{n^2 + n}$$

atunci:

$$a_n = \frac{1}{2}(1 - b_n), \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N},$$

$$b_n = \cos 2\pi \sqrt{n^2+n} = \cos\left(2\pi\left(\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) + n\right)\right) =$$
$$= \cos\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\right)\cos 2n\pi -$$
$$- \sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\right)\sin 2n\pi =$$
$$= \cos\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\right).$$

Deci,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) =$$
$$= \cos\left(2\pi \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\right) = \cos\left(2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}\right) =$$
$$= \cos 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \cos \pi = -1.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}(1 - \lim_{n\to\infty} b_n) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) = 1.$$

2.90. Avem:

$$a_n = n\left(\sin\frac{nx+1}{n} - \sin x\right) = 2n \sin\frac{1}{2n}\cos\frac{2nx+1}{2n} =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{2n}} \cdot \cos\frac{2nx+1}{2n}$$

și prin urmare, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{2n}} \lim_{n\to\infty} \cos\frac{2nx+1}{2n} = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

2.91. Din faptul că:

$$x_{n+1} \cdot x_{n+2} > 0, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}$$

rezultă că $x_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și că toți termenii șirului au același semn. Deci, $x_{n+1}, x_{n+2} \in \mathbf{R}_+^*$ sau $x_{n+1}, x_{n+2} \in \mathbf{R}_-^*$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Vom demonstra că șirul dat este constant. Într-adevăr, dacă $x_{n+1}, x_{n+2} \in \mathbf{R}_+^*$, presupunînd că $(\exists)\, m \in \mathbf{N}$ astfel încît $x_{m+1} > x_m$ atunci din $x_{m+1} > x_m$ și $x_{m+2} \geqslant x_m$ obținem:

$$x_{m+1} \cdot x_{m+2} > x_m \cdot x_{m+2}$$

și:

$$x_{m+2} \cdot x_{m+1} \geqslant x_m \cdot x_{m+1}$$

de unde prin adunare rezultă:

$$2x_{m+1} \cdot x_{m+2} \geqslant x_m \cdot (x_{m+1} + x_{m+2})$$

ceea ce contrazice:

$$(x_{n+1} + x_{n+2})\, x_n = 2x_{n-1} \cdot x_{n+2},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare, presupunerea că $(\exists)\ m \in \mathbf{N}$, astfel încît $x_{m+1} > x_m$ este absurdă și deci $x_{n+1} = x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

În mod analog, presupunînd că există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $x_{m+2} > x_m$ se ajunge la contradicție și deci $x_{n+2} = x_n$; $(\forall) n \in \mathbf{N}$ iar relația:

$$x_n (x_{n+1} + x_{n+2}) = 2x_{n+1} \cdot x_{n+2}$$

ne dă $x_{n+1} = x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Deci șirul este constant pentru $x_n > 0$. Procedăm analog dacă presupunem $x_n < 0$.

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ fiind constant și $x_0 = 1936$ rezultă că $x_n = 1936$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

2.92. Vom începe cu cazul $a = 1$; avem:

$$x_n = \underbrace{3 \cdot 3 \ldots 3}_{(n+1)\text{ ori}},$$

de unde $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

În continuare, $a \neq 1$. În aceste condiții, înmulțind ambii membri ai relației din enunț cu $1 - a \neq 0$, obținem:

$$(1 - a)x_n = (1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6) \ldots$$

$$\ldots (1 + a^{3^n} + a^{2 \cdot 3^n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)x_n = (1 - a^3)(1 + a^3 + a^6) \ldots (1 + a^{3^n} + a^{2 \cdot 3^n}) =$$

$$= (1 - a^9) \ldots (1 + a^{3^n} + a^{2 \cdot 3^n})$$

și așa mai departe, ajungînd în final la relația:

$$(1 - a)\, x_n = 1 - a^{3^{n+1}}.$$

Cum 3^{n+1} este număr impar pentru orice n natural, rezultă că șirul $b_k = a^{3^{k+1}}$ va fi un șir cu termenii negativi sau pozitivi, după cum a este negativ sau pozitiv.

Deci numărul $\frac{1 - a^{3^{n+1}}}{1 - a}$ este pozitiv pentru orice a real diferit de 1 și orice n natural.

Pe baza acestor considerații, revenind la problema din enunț, se obține în final

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{3^{n+1}}}{1 - a} = \begin{cases} \frac{1}{1 - a}, & \text{pentru } |a| < 1 \\ +\infty, & \text{pentru } |a| \geqslant 1. \end{cases}$$

2.93. Avem:

$$\frac{n}{\sqrt[k]{a_n^k + b_n^p}} < u_n < \frac{n}{\sqrt[k]{a_n^k + b_1^p}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{n}{n\sqrt[k]{\left(r_1 + \frac{a_0}{n}\right)^k + \frac{1}{n^{k-p}}\left(r_2 + \frac{b_0}{n}\right)^p}} < u_n <$$

$$< \frac{n}{n\sqrt[k]{\left(r_1 + \frac{a_0}{n}\right)^k + \frac{1}{n^k} \cdot b_0^p}}.$$

Prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{r_1}.$$

2.94. Din modul în care a fost definit șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și deci are sens $\frac{a}{x_i}$, $(\forall) i \in \mathbf{N}^*$ adică șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este definit.

Avem:

$$y_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a}{x_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a + x_i}{x_i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{(i+1)x_i} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_1}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

şi atunci:

$$y_j - y_{j-1} = \frac{1}{(j+1)!} \cdot \frac{x_{j+1}}{x_1} - \frac{1}{j!} \cdot \frac{x_j}{x_1} = \frac{a}{j! x_1},$$

$$(\forall) j \in \mathbf{N}^* - \{1\} \Leftrightarrow y_j = y_{j-1} + \frac{a}{j! x_1},$$

$$(\forall) j \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

De aici rezultă că:

$$\sum_{j=2}^{n} y_j = \sum_{j=2}^{n} y_{j-1} + \frac{a}{x_1} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_n = y_1 + \frac{a}{x_1} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} = y_1 - \frac{2a}{x_1} + \frac{a}{x_1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} =$$

$$= 1 + \frac{a}{x_1} - \frac{2a}{x_1} + \frac{a}{x_1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 - \frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!},$$

$$(\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă ţinem seama că:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

rezultă că:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 1 - \frac{a}{x_1} + \frac{ae}{x_1} = 1 + \frac{a}{x_1}(e - 1).$$

2.95. Avem:

$$a_n = \sum_{i=2}^{n^2-1} [\sqrt{i}]_*^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{k^2+2k} [\sqrt{i}]_*^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(2k+1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-2} k^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6n^4} = \frac{1}{2}.$$

2.96. Vom stabili mai întîi identitatea lui HERMITE[1], adică:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[x + \frac{i}{n}\right]_* = [nx]_*, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr, fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel:

$$f(x) = [x]_* + \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* - [nx]_*.$$

Evident, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ avem:

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* + \left[x + \frac{n}{n}\right]_* -$$

$$- [nx + 1]_* = f(x),$$

ceea ce ne arată că f este periodică de perioadă $T = \frac{1}{n}$.

Deoarece:

$$\left[x + \frac{i}{n}\right]_* = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \text{ și } 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

rezultă că:

$$f(x) = 0, \ (\forall)x \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

[1] Hermite, Charles (1811–1901) — matematician francez.

Prin urmare $f = 0$ și deci:

$$[x]_* + \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* = [nx]_*.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x]_* + \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_*}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[nx]_*}{n} = x.$$

Am ținut seama că din $[nx]_* < nx < [nx]_* + 1$ rezultă:

$$\frac{[nx]_*}{n} \leqslant x < \frac{[nx]_*}{n} + \frac{1}{n}.$$

2.97. Notînd:

$$u_n = \frac{a^n}{(1 + a^{n+1})(1 + a^{n+2})}$$

și:

$$v_n = \frac{1}{1 + a^{n+1}}$$

obținem că:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{a^{n+1}(1-a)}{(1 + a^{n+2})(1 + a^{n+1})} = a(1-a)u_n.$$

Deci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(1 + a^{i+1})(1 + a^{i+2})} = \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{a(1-a)} \sum_{i=1}^{n} (v_{i+1} - v_i) =$$

$$= \frac{1}{a(1-a)}(v_{n+1} - v_1) = \frac{1}{a(1-a)}\left(\frac{1}{1 + a^{n+2}} - \frac{1}{1 + a^2}\right).$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(1 + a^{i+1})(1 + a^{i+2})} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a(1-a)}\left(1 - \dfrac{1}{1+a^2}\right) = \dfrac{a}{(1-a)(1+a^2)}, & 0 < |a| < 1 \\ \dfrac{1}{a(a-1)(a^2-1)}, & \text{dacă } |a| > 1. \end{cases}$$

2.98. Avem:

$$1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k-1)}, \ (\forall) k \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

și prin urmare:

$$a_n = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n}$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$.

2.99. Avem:

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots + (3n-2)^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k-2)^3 =$$

$$= 27 \sum_{k=1}^{n} k^3 - 54 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 36 \sum_{k=1}^{n} k - 8n = 27 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 -$$

$$- 54 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 36 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 8n;$$

$$(1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2))^2 = \frac{n^2(3n-1)^2}{4}$$

și deci limita șirului din enunț este egală cu 3.

2.100. După cum știm:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

unde $\theta_n \in (0, 1)$.
Dacă notăm:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} = y_n$$

atunci avem:

$$\theta_n = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n!n}} = n!n(e - y_n) = n!n\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} - y_n\right) = n!n\left(\frac{1}{(n+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\right) = \frac{n}{n+1} + \frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 1$.

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(2\pi y_n n! + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}} \cdot 2\pi\theta_n = 2\pi \lim_{n\to\infty} \theta_n = 2\pi.$$

2.101. Dacă $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ atunci $n!x = n!\frac{p}{q}$ și este un număr întreg pentru $n > q$ adică pentru orice $n > q$ avem: $\sin^2(n!\pi x) = 0$ și deci $a = 0$ dacă $x \in \mathbf{Q}$.

Dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ atunci deoarece $n!x \notin \mathbf{Z}$ rezultă că $\sin^2(n!\pi x) > 0$ și atunci:

$$a = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}(\sin^2(n!\pi x)) = 1.$$

2.102. Fie $m \in \mathbf{N}^*$ fixat dar arbitrar. Atunci pentru orice $k \in \mathbf{N}$ avem:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{k+i} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{k+i+1} = 1$$

deci:

$$x_{k+1} = x_{k+m+1} \quad (\forall) k \in \mathbf{N}.$$

Ultima relație ne arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este periodic de perioadă m. Știm însă că un șir periodic este convergent dacă și numai dacă este constant. Deoarece șirul $(x_m)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este constant și $\sum_{i=1}^{n} x_{k+i} = 1$, rezultă că:

$$x_n = \frac{1}{m}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*. \text{ Deci, } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{m}.$$

2.103. Deoarece $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} \in [0, 1)$ pentru orice $x \in [0, 1)$, atunci, pentru orice $x \in (4k-1, 4k+1)$, $k \in \mathbf{N}^*$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} = 0 \text{ și deci } a = \sqrt{x}.$$

Dacă $\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} > 1$ adică dacă:

$x \in (4k-3, 4k-2) \cup (4k-2, 4k-1)$, $k \in \mathbf{N}^*$ atunci:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{x + \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4}}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4}}} = x.$$

În sfîrșit, dacă $x = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}^*$ atunci $\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} = 1$ și prin urmare $a = \frac{x+\sqrt{x}}{2}$.

2.104. Deoarece $a_0 \in [0, 1]$ există $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel ca $a_0 = \cos x$.

Rezultă atunci că:

$$\sqrt{1-a_0^2} = \sin x, \ \sqrt{1+a_0} = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}, \ \sqrt{1-a_0} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Prin inducție se arată că dacă:

$$a_{n-1} = \cos\left(x + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x}{2^{n-1}}\right),$$

atunci:

$$\sqrt{1 + a_{n-1}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{x}{2^n}\right);$$

$$\sqrt{1 - a_{n-1}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{x}{2^n}\right).$$

Avînd în vedere că:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{x}{2^n} < \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x}{2^n}\right) = x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

rezultă

$$a_n = \cos\left(x + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x}{2^{n-1}} + \frac{x}{2^n}\right).$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\cos\left(x + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x}{2^n}\right) =$$

$$= \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2a_0^2 - 1.$$

2.105. Avînd în vedere că:

$$C_{k+n}^{k} = \frac{(k+n)\ldots(n+2)(n+1)}{k!}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

rezultă imediat:

$$a_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{C_{k+m}^{k}} = k! \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)} =$$

$$= \frac{k!}{k-1}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{(m+1)\ldots(m+k-1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(m+2)\ldots(m+k)}\right) = \frac{k!}{k-1}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+2)\ldots(n+k)}\right).$$

Și deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)\ldots(n+k)} = 0,$$

deducem imediat, că:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{k-1}$$

adică șirul considerat este convergent.

2.106. Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{k^2 - k^2 + 1}{k^2 + k + k^2 - k} = \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1}\cdot\frac{k-1}{k}}$$

și prin urmare:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}, \quad (\forall)k \in \mathbf{N}^*.$$

De unde prin însumare, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\frac{j}{j+1} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} -$$

$$- \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.107. Este evident că:

$$\frac{1}{a^n + a^{n+1}} \leq \frac{1}{a^i + a^{n+1}} \leq \frac{1}{1 + a^{n+1}}, \quad (\forall)i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

de unde obținem:

$$\frac{n}{a^n + a^{n+1}} \leq x_n \leq \frac{n}{1 + a^{n+1}}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și prin trecere la limită, rezultă că $x = 0$

2.108. Avem:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}}{m}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)-m}{m}\right)^{\frac{m}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)-m}}\right)^{\frac{n}{m}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)-m\right)},$$

$$(\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

de unde prin trecere la limită după n obținem:

$$x = e^{\frac{1}{m}\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)-m\right)}.$$

Dar:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)-m\right) = \sum_{i=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{a_i}-1\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \ln a_i = \ln\left(a_1 \cdot a_2 \ldots a_m\right)$$

și prin urmare:

$$x = e^{\frac{1}{m}\ln\left(a_1\cdot a_2\ldots a_m\right)} = \sqrt[m]{a_1\cdot a_2\ldots a_m}.$$

2.109. Aplicînd teorema lui CESARO-STOLZ obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_n\cdot a_{n+1}}{a_n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_{n+1}^3-a_n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{(a_{n+1}-a_n)\left(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+nr)(a_1+(n+1)r)}{(a_1+nr)^2+(a_1+nr)(a_1+(n-1)r)+(a_1+(n-1)r)^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\left(\frac{a_1}{n}+r\right)+\left(\frac{a_1}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)r\right)\right)}{n^2\left(\left(\frac{a_1}{n}+r\right)^2+\left(\frac{a_1}{n}+r\right)\left(\frac{a_1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot r\right)+\left(\frac{a_1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot r\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{3r}{r^2+r^2+r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

2.110. Aplicînd teorema CESARO-STOLZ obținem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

și, aplicînd din nou teorema CESARO-STOLZ rezultă:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0.$$

2.111. Avem:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} -$$

$$- \ln 2n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) +$$

$$+ \ln 2n - \ln \sqrt{n} - \ln \sqrt{4n}.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C - \frac{C}{2} + \lim_{n\to} \ln \frac{2n}{2n} = \frac{C}{2}.$$

2.112. Pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, notăm:

$$u_n(x) = \sqrt[n]{1^x + 2^x + \ldots + n^x}$$

și avem:

$$n \leqslant 1^x + 2^x + \ldots + n^x \leqslant n \cdot n^x$$

rezultă deci:

$$\sqrt[n]{n} \leqslant u_n(x) \leqslant (\sqrt[n]{n})^{x+1}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* - \{1\} \text{ și } (\forall) x \in \mathbf{R}_+ .$$

de unde, prin trecere la limită obținem:

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n(x) \leqslant 1.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 1, \ (\forall)x \in [0, +\infty)$$

adică limita nu depinde de x.

2.113. Avem: $d(m, n) \cap d(m+1, n+1) = \emptyset$, $(\forall)m, n \in \mathbf{N}$ ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{m+1}}{a_m}, \quad (\forall)m, n \in \mathbf{N}.$$

De aici rezultă că:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1}{a_0}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a_1}{a_0} = a_n r, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

unde am notat $r = \frac{a_1}{a_0}$.

Cu alte cuvinte $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o **progresie geometrică cu** $a_0 = 1$ și $r = a_1$. Deci:

$$a_n = r^n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Totodată:

$$b_n = \frac{a_n}{2} = \left(\frac{r}{2}\right)^n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Dacă $|r| > 2$ atunci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este divergent. Dacă $|r| < 2$ atunci $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Dacă $r = -2$ atunci $b_n = (-1)^n$ și deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este divergent. Dacă $r = 2$ atunci $b_n = 1$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și deci $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, finit și diferit de zero. În concluzie, $a_n = 2^n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

2.114. Dacă $c = 0$, atunci $u_n = a^{\frac{1}{n}}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Dacă $c = 1$, atunci:

$$u_n = (an+b)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{b}{an}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= n^{\frac{1}{n}}\, a^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 + \frac{b}{an}\right)^{\frac{an}{b}}\right)^{\frac{b}{an^2}}$$

de unde prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \cdot 1 \cdot e^0 = 1.$$

Dacă $c > 1$ avem:

$$u_n = b^{\frac{1}{n}}\, c \left(1 + \frac{an^c}{bc^n}\right)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}\, c \left(\left(1 + \frac{an^c}{bc^n}\right)^{\frac{bc^n}{an^c}}\right)^{\frac{an^{c-1}}{bc^n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \cdot c \cdot e^0 = c.$$

2.115. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n!)^2 (n+a)}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2 (n+a)}{n^{kn}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 (n+a+1)}{(n+1)^{k(n+1)}} \cdot \frac{n^{kn}}{(n!)^2 (n+a)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n+1+a)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} (n+1)^k (n+a)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1+a)(n+1)^2}{(n+1)^k (n+a)} \cdot \frac{1}{e^k} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ pentru } k > 2 \\ e^{-2} & , \text{ pentru } k = 2 \\ +\infty, & \text{ pentru } k = 1. \end{cases}$$

2.116. Avem:

$$\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots$$

$$\cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{2n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \pi_n \cdot \frac{2n+1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Deci:

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \pi_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} =$$

$$= \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

unde am notat $u_n = \frac{n^n}{n!}$. Rezultă deci că:

$$b = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \pi \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \pi e.$$

2.117. Se verifică fără dificultate inegalitățile:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}_+^*,$$

în care înlocuim x cu $\frac{k^p}{n^{p+1}}$ și obținem:

$$\frac{k^p}{n^{p+1}} - \frac{k^{2p}}{2n^{2p+2}} < \ln\left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right) < \frac{k^p}{n^{p+1}},$$

$$(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dacă însumăm după k de la 1 la n obținem:

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n^{2p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{2p} < \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right) <$$

$$< \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Ţinînd cont că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}$$

(se constată aceasta prin teorema CESARO-STOLZ) rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n^{2p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{2p} = 0 \cdot \frac{1}{2p+1} = 0$$

şi prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right) = \frac{1}{p+1}.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right)} = e^{\frac{1}{p+1}}.$$

2.118. Avem:

$$\sin \pi \sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a} = \sin\left(\left(\sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a} - n\right) + n\right)\pi =$$

$$= \sin\left(\pi\left(\sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a} - n\right)\right) \cos n\pi +$$

$$+ \cos\left(\pi\left(\sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a} - n\right)\right) \cdot \sin n\pi =$$

$$= (-1)^n \sin \frac{n^k + n^{k-2} + a - n^k}{\sqrt[k]{(n^k + n^{k-2} + a)^{k-1}} + n\sqrt[k]{(n^k + n^{k-2} + a)^{k-2}} + \ldots + n^{k-1}} \cdot \pi.$$

Deci:

$$\cdot \sin^m\left(\pi \sqrt[k]{n^k + n^{n-2} + a}\right) =$$

$$= (-1)^{mn} \sin^m \frac{n^{k-2} + a}{\sqrt[k]{(n^k + n^{k-2} + a)^{k-1}} + n\sqrt[k]{(n^k + n^{k-2} + a)^{k-2}} + \ldots + n^{k-1}} \pi$$

și atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sin^m\left(\pi \sqrt[k]{n^k + n^{k-2} + a}\right) = 0.$$

2.119. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{x} \cdot \frac{n^2(n+1)}{n+1} \cdot$$

$$\cdot \left(x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{x} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \left(n(n+1)\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n(n+1)\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\right).$$

Dacă $x = 1$ atunci:

$$n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = 0, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

deci în acest caz:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = 0 = \ln 1 = \ln x.$$

Dacă $x > 1$ atunci notăm:

$$x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 = a_n > 0, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ și:}$$

$$x^{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 + a_n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} \ln x = \ln (1 + a_n)$$

de unde obținem:

$$n(n+1) = \frac{\ln x}{\ln (1 + a_n)}.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n(n+1)\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln x}{\ln(1+a_n)}=$$

$$=\ln x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}=\ln x\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln x.$$

Dacă $x<1$ atunci $\frac{1}{x}=y>1$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n(n+1)\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{y^{\frac{1}{n(n+1)}}}\cdot\left(1-y^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)\right)=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(n(n+1)\left(y^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)\right)=-\ln y=-\ln\frac{1}{x}=\ln x.$$

Cu aceasta am demonstrat că:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)=\ln x.$$

2.120. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}\right)^{n^2\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right)}=e^{\pi^2}.$$

Aceasta deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-1+1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-1\right)+\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2}{2}+\lim_{n\to\infty}2n^2\cdot\sin^2\frac{\pi}{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}+\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\lim_{n\to\infty}2n^2\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi^2}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}=\pi^2.$$

2.121. Avem:

$$\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}=\frac{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}}{a_{i+1}-a_i}=\frac{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}}{r},\quad(\forall)i\in\mathbf{N}.$$

Deci:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}=\frac{1}{r\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{r\sqrt{n}}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}\right)=\frac{a_{n+1}-a_1}{r\sqrt{n}\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}\right)}=$$

$$=\frac{a_1+nr-a_1}{r\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{r+\frac{a_1}{n}}+\sqrt{\frac{a_1}{n}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{r+\frac{a_1}{n}}+\sqrt{\frac{a_1}{n}}}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}=\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

2.122. Avem:

$$a_n = \left(\left(\left(\frac{\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\left(1+\frac{k+2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{2k}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n^m} =$$

$$= \left(\frac{\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n\left(1+\frac{k+2}{n}\right)^n\cdots\left(1+\frac{2k}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\right)^{n^{m-1}}$$

și prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{e^{k+1}\cdot e^{k+2}\cdots e^{2k}}{e\cdot e^2\cdots e^k}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^{m-1}} = (e^k)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^{m-1}} =$$

$$= \begin{cases} e^{k^2}, & \text{dacă } m = 1 \text{ deci covergent} \\ 1, & \text{dacă } m \in (0, 1) \text{ deci convergent} \\ +\infty, & \text{dacă } m \in [1, +\infty) \text{ deci divergent.} \end{cases}$$

2.123. Este evident că $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Deoarece:

$$\frac{\sqrt{i}}{3+\sqrt{i}} < 1, \quad (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

rezultă imediat că:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{\sqrt{n}+1}{3+\sqrt{n}+1} < x_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător și mărginit inferior.

Prin urmare $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$.

Pentru a calcula limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ să arătăm că:

$$x_n < \frac{1}{3\sqrt{n}}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Vom face demonstrația prin inducție completă.

Pentru $n = 1$ avem $x_1 = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ deci se verifică. Să presupunem că pentru $n = k$ avem $x_k < \frac{1}{3\sqrt{k}}$ și să demonstrăm că pentru $n = k + 1$ avem:

$$x_{k+1} < \frac{1}{3\sqrt{k+1}}.$$

Într-adevăr:

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{3+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{3\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{3+\sqrt{k+1}}.$$

Observăm că:

$$\frac{1}{3\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{3+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{3\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow k+1 < \sqrt{k}(3+\sqrt{k+1})$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{(k+1)^2}{k} < k + 10 + 6\sqrt{k+1} \Leftrightarrow \frac{k^2 + 2k + 1 - k^3 - 10k}{k} <$$

$$< 6\sqrt{k+1}$$

echivalent cu:

$$\frac{1 - 8k}{k} < 6\sqrt{k+1}$$

ceea ce este evident.

Prin urmare, $x_{k+1} < \frac{1}{3\sqrt{k+1}}$ și atunci conform concluziei principiului inducției complete rezultă:

$$0 < x_n < \frac{1}{3\sqrt{n}}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin trecere la limită, din ultima inegalitate obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

2.124. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar, dar fixat. Din convergența lui $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă că $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad (\forall) n > n_\varepsilon.$$

Este evident că:

$$y_n - x = \frac{x_0 + C_n^1 x_1 + \ldots + C_n^n x_n}{2^n} - \frac{2^n x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} (x_i - x) C_n^i.$$

Rezultă că pentru $(\forall) n > n_\varepsilon$ avem:

$$|y_n - x| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} |x_i - x| C_n^i + \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n} |x_i - x| C_n^i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n_\varepsilon} |x_i - x|}{2^n} \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} C_n^i + \frac{\varepsilon}{2^n} \cdot \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n} C_n^i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n_\varepsilon} |x_i - x|}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} C_n^i + \varepsilon.$$

Deoarece:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} C_n^i = 0$$

rezultă că $(\exists) n'_\varepsilon \geqslant n_\varepsilon$ astfel încît:

$$\frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n_\varepsilon} |x_i - x|}{2^n} \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} C_n^i \leqslant \varepsilon, \quad (\forall) n \geqslant n'_\varepsilon.$$

Deci:

$$|y_n - x| < 2\varepsilon, \quad (\forall) n > n'_\varepsilon$$

echivalent cu $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$.

2.125. Avem:

$$u_n = x_n - y_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{i} - 1} - \frac{1}{\sqrt{i} + 1} \right) = 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i - 1} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j},$$

de unde, dacă ținem seama că șirul $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ este divergent la $+\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

Deci șirul $(u_n)_{n \geqslant 2}$ nu este convergent deoarece

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty.$$

2.126. a°). Se stabilește ușor, prin inducție matematică, egalitatea:

$$f_n(x) = e^x(e^h - 1)^n \quad (\forall)n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$, avem $f_0(x) = e^x$ și dacă admitem:

$$f_{n-1}(x) = e^x(e^h - 1)^{n-1}$$

atunci:

$$f_n(x) = f_{n-1}(x + h) - f_{n-1}(x) = e^{x+h}(e^h - 1)^{n-1} = \ldots$$
$$\ldots = e^x(e^h - 1)^{n-1} = e^x(e^h - 1)^n.$$

Deci formula (1) este adevărată $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

1°). Avem:

$$a_n = \frac{f_n(x)}{e^x} = (e^h - 1)^n, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și, deoarece pentru orice $h \in \mathbf{R}$ avem $e^h - 1 > -1$, distingem următoarele cazuri:

1°). $e^h - 1 = 1 \Leftrightarrow h = \ln 2$, și atunci

$$a_n = 1, \quad (\forall)n \in \mathbf{N} \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2°). $e^h - 1 > 1 \Leftrightarrow h > \ln 2$ deci $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3°). $0 < e^h - 1 < 1 \Leftrightarrow -\infty < h < \ln 2$, și atunci rezultă că: $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$.

4°). $e^h - 1 = 0, \Leftrightarrow h = 0, \Leftrightarrow a_n = 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$ deci rezultă că: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5°). $-1 < e^h - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < e^h < 1 \Leftrightarrow h < 0$ atunci $|e^h - 1| < 1$ deci $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Deci, dacă $h \leqslant \ln 2$ atunci șirul este convergent iar dacă $h > \ln 2$ atunci șirul este divergent.

2.127*. Notînd, $u_n = \frac{x_{n+1}^n}{y_n}$ obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)^{n+1} = m \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}} = m$. Prin urmare avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}} \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}} \cdot \frac{x_n}{n} \cdot \frac{n+1}{x_{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= d \cdot m \cdot \frac{1}{d} \cdot 1 = m.$$

Mai departe avem egalitățile:

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}}\right)^n = \left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{y_{n+1}^n}{y_n^{n+1}}}\right)^n = \sqrt[n+1]{\frac{y_{n+1}^n}{y_n^{n+1}}} =$$

$$= \sqrt[n+1]{\frac{x_{n+1}^n}{y_n}} = \left(\frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

de unde rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}}\right)^n = m.$$

Totodată avem:

$$\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}} = \frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}} = \frac{1}{m} \cdot m \cdot 1 = 1$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sqrt[n]{y_n}} = 0$.

Avem:

$$m = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{b_n}{\sqrt[n]{y_n}}\right)^{\frac{\sqrt[n]{y_n}}{b_n}}\right)^{b_n\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{y_n}}} =$$

$$= e^{b\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}\cdot\frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}}} = e^{b\cdot\frac{1}{d}\cdot m}.$$

Prin urmare: $d \ln m = mb \Leftrightarrow b = \dfrac{d\ln m}{m}$.

Dacă $d = 1$ și $m = e$ atunci se obține problema lui *Lalescu* (**3.20**).

2.128. a°). Avem:

$$\frac{1}{(k-1)!+k!} = \frac{1}{(k-1)!(k+1)} = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

și deci:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

b°). Avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!} = 1$$

deci șirul este convergent.

c°). Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot n!\cdot \ln a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)^{-(n+1)!}\right)^{-\frac{n\cdot n!}{(n+1)!}} =$$

$$= \ln e^{-1} = -1 \text{ și } \lim_{n\to\infty} a_n^{(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)^{-(n+1)!}\right)^{-(n+2)} = 0.$$

Prin urmare, relația din enunț este demonstrată.

2.129. a°). Fie $n \in \mathbf{N}^*$, atunci pentru $(\forall)\, k \leq n$ avem:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k-1}+\sqrt{k}+\sqrt{k}+1+\ldots+\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{n}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k-1}+\underbrace{\sqrt{k}+\sqrt{k}+\ldots+\sqrt{k}}_{n-k+1 \text{ ori}}} \quad b_n^{(k)}.$$

b°). Se observă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Prin urmare, pentru $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ are loc:

$$\left| b_n^{(k)} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right| < \varepsilon.$$

Rezultă deci că:

$$\left| b_n^{(k)} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right| < \varepsilon, \ (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Luînd, în particular $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k}}$, atunci $(\exists)\, n_k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)\, n \geq n_k$ are loc:

$$\left| b_n^{(k)} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right| < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

și deci:

$$b_n^{(k)} < \frac{2}{\sqrt{k}}.$$

Din cele demonstrate la punctul a°) rezultă că:

$$a_n < b_n^{(k)} < \frac{2}{\sqrt{k}}$$

și prin urmare:

$$a_n < \frac{2}{\sqrt{k}}.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar, dacă luăm $k = \left[\frac{4}{2\varepsilon^2}\right]_* + 1$ atunci $k > \frac{4}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{\sqrt{k}}$ și deci notînd numărul natural n_k (găsit pentru cazul precedent) cu n_ε atunci pentru $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$|a_n| = a_n < \frac{2}{\sqrt{k}} < \varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2.130. Vom demonstra prin inducție matematică faptul că $a_{n+1} > a_n$, $(\forall)\, n \geq 1$.

Într-adevăr:

$$a_2 = x^{a_1} = x^{x^{-1+\frac{1}{x}}} > x.$$

Presupunem că $a_n > a_{n-1}$ și să demonstrăm că $a_{n+1} > a_n$. Este evident că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{a_n}}{x^{a_{n-1}}} = x^{\frac{a_n - a_{n-1}}{x}} > x^0 = 1,$$

deci șirul este strict crescător.

Pentru a studia mărginirea, observăm că $a_1 = x^{\frac{1}{x}} < x$ și deci dacă presupunem că $0 < a_n < x$ atunci:

$$a_{n+1} = x^{\frac{a_n}{x}} < x^{\frac{x}{x}} = x$$

ceea ce arată că șirul este mărginit superior de x.

Prin urmare șirul este strict crescător și mărginit superior de x. Deci șirul este convergent și dacă notăm $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ rezultă prin trecere la limită în relația de recurență că $a = x^{\frac{a}{x}}$ de unde rezultă $a = x$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

2.131. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde:

$$f(x) = x^n - nx + 1.$$

Aceasta este o funcție continuă pe $\mathbf{R}$ și $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 2 - n < 0$ pentru $n > 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ prin urmare există $a_n \in (0, 1)$ și $b_n \in (1, +\infty)$ astfel încît $f(a_n) = f(b_n) = 0$, oricare ar fi $n > 2$.

Este evident că:

$$f(a_n) = a_n^n - n\,a_n + 1 = 0$$

și $a_n \in (0, 1)$ implică $a_n^n < 1$ și $0 < a_n < \frac{2}{n}$, de unde, prin trecere la limită rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Din faptul că:

$$f(b_n) = b_n^n - n\,b_n + 1 = 0$$

și $b_n > 1$ pentru orice $n > 2$, rezultă că $b_n = 1 + c_n$ cu $c_n > 0$ oricare ar fi $n > 2$ și deci;

$$(1 + c_n)^n - n(1 + c_n) + 1 = 0$$

oricare ar fi $n > 2$.

Avem șirul de echivalențe și implicații:

$$(1 + c_n)^n - n(1 + c_n) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + n\,c_n + \frac{n(n-1)}{2}\,c_n^2 + \ldots +$$

$$+ c_n^n - n - n\,c_n + 1 = 0 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}\,c_n^2 < n \Leftrightarrow 0 < c_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

oricare ar fi $n > 2$. Prin trecere la limită rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2 = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

2.132. Avem:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{2n+2}}\,C_{2n+2}^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+2}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

Deci $a_{n+1} < a_n$ și deci, șirul este strict descrescător. Pe de altă parte, termenii lui fiind pozitivi, rezultă că este mărginit inferior de zero. Fiind monoton, $a_n > a_{n+1}$, și mărginit $0 < a_n \leqslant a_1$, șirul este convergent.

Pentru găsirea limitei vom observa că:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \ldots (2n)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ultima inegalitate se demonstrează prin inducție completă.

Notînd $b_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$, deoarece $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ și deoarece, conform demonstrației de mai sus, $a_n < b_n$, în baza criteriului majorării putem afirma că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.133. a°). Avem:

$$\frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{nA+B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{(n+1)A+B}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*,$$

de unde rezultă $A = 1$, $B = 3$ și deci

$$f(n) = \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

b°). Este evident că:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1) =$$

$$= 1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Se constată fără dificultate că:

$$b_n < 1, \quad b_n > b_1, \quad b_n < b_{n+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict monoton și mărginit. Prin urmare șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent. Din expresia lui b_n se obține că $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

c°). Avem:

$$c_n = \left(\left(1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{-\frac{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1}}{n+4}}\right)^{-\frac{n(n+4)\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)2^{n+1}}}$$

de unde, prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = e^{-\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+4)}{2(n+1)(n+2)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2.134. Notînd $\sqrt[n]{a_n} = b_n$, relația din enunț devine:

$$\frac{1}{b_{n+1}-1} - \frac{1}{b_n - 1} = 1,\ b_1 = 2.$$

Această relație se mai poate scrie:

$$\frac{1}{b_{n+1}-1} = \frac{1 + b_n - 1}{b_n - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}-1} = \frac{b_n}{b_n - 1},$$

de unde deducem:

$$b_{n+1} = \frac{2b_n - 1}{b_n}. \tag{1}$$

Din această ultimă relație obținem:

$$b_1 = \frac{2}{1},\quad b_2 = \frac{3}{2},\quad b_3 = \frac{4}{3},\quad b_4 = \frac{5}{4}\ldots$$

Arătăm, prin inducție, că termenul general al șirului $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este de forma $b_n = \frac{n+1}{n}$.

Pentru $n = 1$ avem $b_1 = \frac{2}{1}$; pentru $n = 2$ avem $b_2 = \frac{3}{2}$.

Presupunem relația adevărată pentru n, adică $b_n = \frac{n+1}{n}$.

Trebuie să arătăm că $b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. Avem:

$$b_{n+1} = \frac{2b_n - 1}{b_n} = \frac{2\cdot\frac{n+1}{n} - 1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Deci am arătat că $b_n = \frac{n+1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Vom avea

$$a_n = (b_n)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Prin urmare, termenul general al șirului este:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

2.135. Dacă $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]_*$, $b_n = n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ atunci p_1 este adevărată, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Într-adevăr:

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right]_*$$

echivalent cu:

$$\frac{n}{2} - 1 < a_n \leqslant \frac{n}{2},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{n-2}{2n} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{1}{2},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*,$$

adică echivalent cu:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2n} < \frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{1}{2},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă atunci că:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Totodată, $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \left[\frac{n+1}{2}\right]_* - \left[\frac{n}{2}\right]_* = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$ ceea ce arată că p_3 este falsă $\left(\text{adică } \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right.$ nu are limită$\left.\right)$.

Deci $p_1 \wedge p_3$ nu implică p_2 adică reciproca teoremei CESARO-STOLZ nu este adevărată.

2.136. 1°). Avem:

$$a_n = \left(\frac{(a+n)\cdot(a+n-1)\ldots(n+1)\cdot n\ldots 1}{n!n^a}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{a+n}{n}\cdot\frac{a+n-1}{n}\ldots\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s-a descompus astfel într-un produs de a șiruri convergente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \cdot \ldots \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$e^a \cdot e^{a-1} \cdot e^{a-2} \ldots e^1 = e^{\frac{(1+a)a}{2}}.$$

2°). Avem:

$$f(1)\cdot f(2)\ldots f(a) = e^{\frac{1+1^2}{2}} \cdot e^{\frac{2+2^2}{2}} \ldots e^{\frac{a+a^2}{2}} =$$

$$= e^{\frac{(1+2+\ldots+a)+(1^2+2^2+\ldots+a^2)}{2}} = e^{\frac{a(a+1)(a+2)}{6}} = \left(e^{\frac{a(a+1)}{2}}\right)^{\frac{a+2}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{f(a)^{a+2}}.$$

2.137. Avem:

$$x = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\left(\ln\sin\frac{\pi}{2n} + \ln\sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \ln\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\ln\prod_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}. \tag{1}$$

Știm că:

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{i\pi}{n}+1\right),$$

$$(\forall)\ n\in\mathbf{N}^* \text{ și } (\forall)\ z\in\mathbf{C}\setminus\{-1,1\}. \tag{2}$$

Din (2) trecînd la limită cu $z^2\to 1$ obținem:

$$n = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right) = 2^{2n-2}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\sin^2\frac{i\pi}{2n}.$$

De aici, prin logaritmare obținem:

$$\ln n = 2(n-1)\ln 2 + 2\ln\prod_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n},$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\ln\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n} = \frac{\ln n - 2(n-1)\ln 2}{2}$$

echivalent cu:

$$\frac{\pi}{2n}\ln\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln n-2(n-1)\ln 2}{2n}.$$

Din ultima egalitate, prin trecere la limită, obținem:

$$x=-\frac{\pi}{2}\ln 2=\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

2.138. Avem:

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(2i+1)^m-(2i-1)^m}{(2i+1)^m(2i-1)^m}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(2i-1)^m}-\frac{1}{(2i+1)^m}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^m}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)^m}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(2j+1)^m}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j+1)^m}=$$

$$=1-\frac{1}{(2n+1)^m}.$$

De aici rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2.139. Avem:

$$f(x)=\frac{(C_{n+1}^1)^{x-a}-(C_n^1)^{x-a}}{b^a(b^{x-a}-1)}=b^{-a}\cdot\frac{x-a}{b^{x-a}-1}\cdot\frac{(n+1)^{x-a}-n^{x-a}}{x-a}=$$

$$=b^{-a}\cdot\frac{y}{b^y-1}\cdot\frac{(n+1)^y-1-(n^y-1)}{y},$$

unde am notat $y=x-a$.

Deci:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b^{-a}\lim_{y\to 0}\frac{y}{b^y-1}\left(\frac{(n+1)^y-1}{y}-\frac{n^y-1}{y}\right)=$$

$$=\frac{b^{-a}}{\ln b}\cdot\ln\frac{n+1}{n}.$$

Rezultă atunci că:

$$x_n=\frac{b^{-a}}{\ln b}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{b^{-a}}{\ln b}\cdot\ln e_n.$$

Se știe însă că șirul $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător și mărginit $e_n \in (2, 3)$, deci și șirul $\ln e_n$ este strict crescător și $\ln e_n \in (\ln 2, \ln 3)$ deci este convergent.

De aici rezultă că șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător și mărginit, adică este convergent. Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b-a}{\ln b} \ln \lim_{n\to\infty} e_n = \frac{b-a}{\ln b}$$

2.140. Ținînd seama de definiția funcției parte întreagă, rezultă că pentru orice număr întreg k:

$$f(x) = k \sin \pi x$$

oricare ar fi $x \in [k, k+1)$.

Pentru orice $p \in \mathbf{N}$, se observă că $m_{2p} = 0$, căci $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [2p, 2p+1)$ și:

$$m_{2p+1} = f\left(2p + \frac{3}{2}\right) = -(2p+1).$$

Rezultă atunci că:

$$s_n = \left(\sum_{p=1}^{n} 2^{m_{2p}} - n\right) + \sum_{p=1}^{n} 2^{m_{2p-1}} = \sum_{p=1}^{n} 2^{-(2p-1)}$$

care este suma unei progresii geometrice cu primul termen $\frac{1}{2}$ și rația $\frac{1}{4}$ de unde $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{3}$.

2.141. Ecuația caracteristică a acestei relații de recurență este:

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Prin urmare, avem:

$$A_n = U + \frac{1}{2^n} V + \frac{1}{3^n} W, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

unde U, V, W sînt matrici pătratice care trebuiesc determinate în condițiile inițiale din enunț. Avem, deci:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = U + V \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} + W \cdot \lim \frac{1}{3^n} = U.$$

Condițiile inițiale ne dau:

$$\begin{cases} U + V + W = A_0 \\ 6U + 3V + 2W = 6A_1 \\ 35U + 9V + 4W = 35A_2 \end{cases}$$

de unde obținem:

$$U = \frac{1}{2}(6A_2 - 5A_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 27 & 18 \end{vmatrix}.$$

2.142. *Soluția I.* Observăm că:

$$a_1 = a_0 + 1(15 \cdot 1 - 1) = 15 \cdot 1^2 - 1, \quad b_1 = b_0 + 1(3 \cdot 1 - 1) = 3 \cdot 1^2 - 1$$

$$a_2 = a_1 + 2(15 \cdot 2 - 1) = a_1 + 15 \cdot 2^2 - 2, \quad b_2 = b_1 + 2(3 \cdot 2 - 1) = b_1 + 3 \cdot 2^2 - 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = a_{n-1} + 15n^2 - n, \quad b_n = b_{n-1} + 3n^2 - n.$$

Adunînd aceste relații membru cu membru obținem:

$$a_n = 15(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1 + 2 + \ldots + n) =$$

$$= 15 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = 5n^3 + 7n^2 + 2n.$$

$$b_n = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1 + 2 + \ldots + n) = n^3 + n^2.$$

Rezultă deci că:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (5i^3 + 7i^2 + 2i) = 5\sum_{i=0}^{n} i^3 + 7\sum_{i=0}^{n} i^2 +$$

$$+ 2\sum_{i=0}^{n} i = 5\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12} \cdot (15n(n+1) + 14(2n+1) + 12)$$

și analog:

$$\sigma_n = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}.$$

Prin urmare:

$$\frac{s_n}{\sigma_n} = \frac{15n(n+1)+14(2n+1)+12}{3n^2+7n+2}$$

și deci, prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sigma_n} = 5.$$

Soluția a II-a. Este evident că șirul $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător și nemărginit. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}-s_n}{\sigma_{n+1}-\sigma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^3+7(n+1)^2+2(n+1)}{(n+1)^3+(n+1)^2} = 5.$$

Fiind îndeplinite condițiile teoremei *Cesaro-Stolz* rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sigma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}-s_n}{\sigma_{n+1}-\sigma_n} = 5.$$

2.143. Este evident că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}(a,r)-s_n(a,r)}{u_{n+1}-u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ru_{n+1}} = 0$$

și deoarece sînt îndeplinite condițiile din teorema CESARO-STOLZ rezultă că limita din enunț este zero.

2.144. Deoarece șirul este strict crescător și nemărginit rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Din:

$$a_1 < a_2 < \ldots a_{n-2} < a_{n-1}$$

rezultă că:

$$a_1^n < a_2^n < \ldots < a_{n-1}^n$$

deci:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n > a_{n-1}^n$$

de unde rezultă:

$$\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n} > a_{n-1}.$$

De aici, prin trecere la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n} \geqslant \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = +\infty$$

și prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n} = +\infty.$$

Dacă $a_i = i + 1$, $(\forall)\ i \in \mathbf{N}^*$ atunci obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \ldots + n^n} = +\infty.$$

2.145. Avem:

$$a_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{(n+1)\sqrt[n]{n!}} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{2\sqrt[n]{n!}}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

adică echivalent cu:

$$\ln b_n = \frac{\ln n! - n \ln n}{n}.$$

Aplicînd teorema lui STOLZ-CESARO obținem:

$$\ln \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (\ln (n+1)! - (n+1)\ln (n+1) - \ln n! +$$

$$+ n \ln n) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \ln \frac{1}{e} = -1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{e}{2}.$$

2.146. Avem.

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k}{k(k+1)} = \frac{x_1}{1 \cdot 2} + \frac{x_1 + 2x_2}{2 \cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{n(n+1)} = x_1\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) +$$

$$+ 2x_2\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \ldots + nx_n \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Folosind faptul că:

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}, \quad (\forall)\, j \in \mathbf{N}^*$$

obținem:

$$b_n = x_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ 2x_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \ldots + nx_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = x_1\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ 2x_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + nx_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - \frac{1}{n+1}(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) =$$

$$= s_n - \frac{1}{n+1}(ns_n - s_1 - s_2 - \ldots - s_{n-1}) = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$$

unde:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Aplicînd teorema CESARO-STOLZ obținem:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} s_{n+1} = a.$$

2.147. Avem:

$$\left(\frac{k!\,x_1x_2\ldots x_k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{x_1\,(2x_2)\,(3x_3)\ldots(kx_k)}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_1+2x_2+3x_3+\ldots+kx_k}{k(k+1)}.$$

Deci:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k!\,x_1\cdot x_2\ldots x_k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x_1+2x_2+\ldots+kx_k}{k(k+1)}.$$

Dacă în ultima inegalitate trecem la limită și ținem seama de problema **2.146** rezultă enunțul.

2.148. Fie $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n\in\mathbf{R}$. Deoarece:

$$s_{n+1}-s_n=\sum_{i=1}^{n+1}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i=x_{n+1}$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}s_{n+1}-\lim_{n\to\infty}s_n=s-s=0.$$

Reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie $x_n=\frac{1}{n}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$; atunci este evident că:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

dar:

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

și, după cum știm:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

deci șirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ nu este convergent în acest caz.

2.149. *Soluția I.* Dacă notăm $u_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Soluția a II-a. Avem:

$$\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln a_i}{n}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \ln a_i - \sum_{i=1}^{n} \ln a_i}{(n+1) - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln a_{n+1} = \ln \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ln \lim_{n\to\infty} a_n = \ln a.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = e^{\ln \lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Soluția a III-a. Pentru $a \in \mathbf{R}_+^*$ din inegalitățile:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

rezultă inegalitățile:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

De aici, prin trecere la limită, obținem:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \leqslant a, \text{ unde } a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Și, prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = a.$$

2.150. Aplicînd teorema lui CESARO-STOLZ obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_n + x_{n+1} - (x_1 + x_2 \dots + x_n)}{x_{n+1} - x_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_{n+1}}{x_n}}{\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1} = \frac{x}{x-1}.$$

2.151. Avem:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = 1 + \frac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} =$$

$$1 + \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Prin trecere la limită avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} =$$

$$= 1 + x \cdot \frac{x-1}{x} = x$$

cu $x \neq 1$. Pentru $x = 1$ se aplică teorema CESARO-STOLZ.

2.152. Dacă în inegalitatea evidentă:

$\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geqslant 0 \quad (\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ facem $\alpha = ia_i$ obținem că:

$$i^2 a_i^2 - 2ia_i + 1 \geqslant 0,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_i^2 + \frac{1}{i^2} \geqslant \frac{2a_i}{i},$$

adică echivalent cu:

$$\frac{a_i}{i} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_i^2 + \frac{1}{i^2}\right), \quad (\forall)\, i \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare, obținem:

$$y_n \leqslant \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}. \tag{1}$$

Avînd în vedere că șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(h_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$h_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

sînt convergente rezultă că ele sînt mărginite. Deci $(\exists) M > 0$ astfel încît:

$$\frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} h_n < M \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Din inegalitatea (1) obținem:

$$0 \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{2}(x_n + h_n) < M, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce ne arată că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit.

Deoarece $\frac{a_i}{i} \geqslant 0$, $(\forall) i \in \mathbf{N}^*$ rezultăcă $y_n \leqslant y_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ adică șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este crescător.

Fiind crescător și mărginit rezultă că este convergent.

2.153. a'). Mai întîi va trebui să calculăm pe σ_n. Avem:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}.$$

Înmulțim ambii membri cu $2k-1$ și deci:

$$\frac{1}{2k+1} = A + \frac{B(2k-1)}{2k+1}$$

de unde pentru $k = \frac{1}{2}$, obținem $A = \frac{1}{2}$ și tot așa înmulțind cu $2k+1$ și luînd $k = -\frac{1}{2}$, rezultă $B = -\frac{1}{2}$.

Avem deci egalitatea:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

care pentru $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ne dă:

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right);\ \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right); \ldots;$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

și adunînd aceste egalități obținem:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Prin urmare:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$$

de unde:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

b°). Avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2n+3}}{1 + \frac{1}{2n+1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+5n+3}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2n^2+5n+3}\right)^{-(2n^2+5n+3)}\right)^{\frac{-n}{(2n^2+5n+3)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)$$

și trecînd la limită, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^2\cdot 1\qquad 1.$$

2.154. *Soluția I.* Folosim faptul că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}$$

și atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{1}{e}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)=0$$

deci echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=1.$$

Soluția a II-a. Folosim teorema:

„Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere strict pozitive și dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x$, *finită sau infinită atunci există și* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x$."

Avem:

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{n}{n+1}. \qquad (1)$$

Dar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

Cu aceasta, din (1) obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1.$$

2.155. a°). Avem:

$$\ln n < n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

De unde obținem, $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$. Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

De aici deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\ln n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Deoarece:

$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\ln n} > 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\ln n} = 0.$$

b°). Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Făcînd aici $k = 1, k = 2, \ldots, k = n$ și însumînd membru cu membru, găsim:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n^2}}$$

de unde:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}. \qquad (1)$$

Ținînd seama că:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Deci,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Ținînd seama de acestea, și trecînd la limită în inegalitatea (1), obținem:

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} = 1.$$

2.156. Considerăm identitatea:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x + 1}{(x-1)^2}$$

care este adevărată $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ și $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Punînd $x = \frac{1}{3}$ obținem:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\cdot\frac{1}{3^n} + 1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}.$$

Ținînd seama că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2\cdot 3^{j-1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{3^{j-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\cdot\frac{1}{3^n} + 1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{8}.$$

2.157. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k+2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)}.$$

Însă:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)} < \sqrt{\frac{1}{2n+3}}$$

pentru $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Rezultă, prin trecere la limită, că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)} = 0.$$

Deci limita șirului din enunț este $\frac{1}{2}$.

2.158. Deoarece sistemul liniar dat nu este compatibil determinat oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$ rezultă că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{m+1} & a_{n+1} \\ a_m & a_n \end{vmatrix} = 0$$

oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$ ceea ce este echivalent cu:

$$a_{m+1} a_n - a_{n+1} a_m = 0,\ (\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$$

adică echivalent cu:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{a_{n+1}}{a_n},\ (\forall)\ m,\ n \in \mathbf{N}.$$

Rezultă deci că:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \in \mathbf{R}^*,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} = k a_n,\ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

și atunci, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este o progresie geometrică de rație k.

Deci:

$$a_n = a_0 k^n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

şi cum $a_0 = 1$ rezultă că:

$$a_n = k^n, \ (\forall) \ n \in \mathbf{N},$$

Prin urmare:

$$b_n = \left(\frac{k}{3}\right)^n, \ \ (\forall) \ n \in \mathbf{N}$$

şi deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} b_n \in \mathbf{R}$ rezultă că avem $\frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$.

Deci $a_n = 3^n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}$.

2.159. Deoarece $x \in \mathbf{R} \Rightarrow 1 - x \in \mathbf{R}$ rezultă că are sens $f(1 - x)$ şi avem:

$$f(1 - x) = \frac{a^{-2x+b+2}}{a^{-2x+2} + a} = \frac{a^{b+1}}{a^{2x} + a}.$$

Deci:

$$f(x) + f(1 - x) = \frac{a^{2x+b}}{a^{2x} + a} + \frac{a^{b+1}}{a^{2x} + a} = \frac{a^{2x+b} + a^{b+1}}{a^{2x} + a} =$$

$$= a^b, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Prin urmare:

$$u_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right),$$

$$u_n = f(n) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0).$$

De unde adunînd şi ţinînd seama de (1) obţinem:

$$2u_n = (n + 1)a^b,$$

deci:

$$u_n = \frac{1}{2}(n + 1)a^b.$$

Dacă $b = n$, atunci:

$$u_n = \frac{1}{2}(n+1)a^n$$

și deci:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt[n]{n+1} \cdot a}{\sqrt[n]{2}}$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

2.160. Dezvoltînd determinantul după prima linie obținem:

$$a_n = (a+b)\,a_{n-1} - aba_{n-2},\ (\forall)\ n > 2.$$

Prin inducție se stabilește că:

$$a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci:

$$\frac{a_n}{c^n} = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{b}{a}}, \text{ dacă } |a| > |b| \\ \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\dfrac{a}{b} - 1}, \text{ dacă } |a| < |b|. \end{cases}$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c^n} = \begin{cases} \dfrac{a}{a-b}, \text{ dacă } |a| > |b| \\ \dfrac{b}{b-a}, \text{ dacă } |a| < |b|. \end{cases}$$

2.161. Dezvoltînd pe a_n după elementele primei linii obținem relația de recurență:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ n \geqslant 3.$$

Ecuația caracteristică a acestei relații de recurență este:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

cu rădăcinile:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Deci:

$$a_n = Ax_1^n + Bx_2^n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n,$$

de unde, dacă ținem seama de condițiile inițiale rezultă că:

$$A = -2, \ B = 3.$$

Prin urmare:

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

și atunci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{3^n} =$$

$$= \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3}.$$

2.162. Dacă notăm:

$$y_n = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(n + a + i)}$$

atunci avem:

$$y_n - y_{n+1} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(n + a + i)} - \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(n + a + i + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(n + a + i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(n + a + i)} =$$

$$= \frac{n + a + k - n - a}{\prod_{i=0}^{k}(n + a + i)} = \frac{k}{x_n}$$

și deci am obținut că:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j+1}) = \frac{1}{k} (y_1 - y_{n+1}).$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{y_1}{k} = \frac{1}{k \prod_{i=0}^{k-1} (1 + a + i)} =$$

$$= \frac{1}{k(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}.$$

2.163. Avem:

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 + \sqrt{a_1 a_2}}{b_2} + \ldots + \frac{a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}}{b_n}\right)$$

și deci aplicînd teorema CESARO-STOLZ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}}}{b_{n+1}}. \quad (1)$$

Deoarece $b_1 > 0$, rezultă că:

$$b_{n+1} > b_n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Deci în (1) putem aplica din nou teorema CESARO-STOLZ și obținem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+2]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} a_{n+2}}}{b_{n+2} - b_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+2]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{a}{r} \text{ unde } a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2.164. Fie $m \in \mathbf{N}^*$ și fie $m \leqslant x < m + 1$; atunci avem $[x]_* = m$.

Vom avea de asemenea:

$$\int_m^{m+1} \frac{dx}{[x^2]_* + [x]_*} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{m+\varepsilon}^{m+1-\varepsilon} \frac{dx}{[x]_*^2 + [x]_*} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{m+\varepsilon}^{m+1-\varepsilon} \frac{dx}{m^2 + m} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{m^2 + m} \cdot x \Big|_{m+\varepsilon}^{m+1-\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{(m + 1 - \varepsilon - m - \varepsilon)}{m^2 + m} = \frac{1}{m^2 + m}.$$

Atunci:

$$\int_1^n \frac{dx}{[x]_*^2 + [x]_*} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{dx}{[x]_*^2 + [x]_*} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2 + i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{dx}{[x]_*^2 + [x]_*} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

2.165. Vom deosebi trei cazuri după cum urmează:
a°). $x < 0$. Putem presupune, fără a micșora generalitatea, că $x_n < 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$. Avem:

$$\left| \sqrt[2k+1]{x_n} - \sqrt[2k+1]{x} \right| =$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k+1]{x_n^{2k}} + \sqrt[2k+1]{x \cdot x_n^{2k-1}} + \ldots + \sqrt[2k+1]{x_n x^{2k-1}} + \sqrt[2k+1]{x^{2k}}} <$$

$$< \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|x_n - x| < \varepsilon \cdot \sqrt[2k+1]{x^{2k}}, \quad (\forall)\, n > n_\varepsilon.$$

Prin urmare, $(\forall)$ $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$\left| \sqrt[2k+1]{x_n} - \sqrt[2k+1]{x} \right| < \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}} < \frac{\varepsilon \sqrt[2k+1]{x^{2k}}}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}} = \varepsilon, \quad (\forall) n > n_\varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2k+1]{x_n} = \sqrt[2k+1]{x}.$$

b°). $x = 0$. În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dacă și numai dacă $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ atunci:

$$\sqrt[2k+1]{|x_n|} < \varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k+1]{|x_n|} = 0$$

adică echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k+1]{x_n} = 0.$$

c°). $x > 0$. Ca și în cazul $x < 0$ putem presupune că $x_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și atunci obținem:

$$\left|\sqrt[2k+1]{x_n} - \sqrt[2k+1]{x}\right| =$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k+1]{x_n^{2k}} + \sqrt[2k+1]{x \cdot x_n^{2k-1}} + \ldots + \sqrt[2k+1]{x^{2k}}} < \frac{|x_n - x|}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}}.$$

De aici, ca și în cazul $x < 0$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2k+1]{x_n} = \sqrt[2k+1]{x}.$$

2.166. Aplicăm teorema CESARO-STOLZ și avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} - x^n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} x^n(x - 1) =$$

$$= (x - 1) \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ +\infty & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

2.167. Deoarece:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n+1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}$$

rezultă că $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton crescător.

În egalitatea:

$$\frac{k}{3\cdot 5\ldots(2k+1)}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}$$

dăm lui k valorile $1, 2, 3, \ldots, n$ și adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3\ldots(2n+1)}<\frac{1}{2}$$

deci $a_n\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ adică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.

Dacă în relația:

$$a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3\ldots(2n+1)}$$

trecem la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

2.168. Avem:

$$x_n=n+1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}\right)=$$

$$=n+1-\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)=n+1-\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k!}\right)=$$

$$=n+1-n+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+$$

$$+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}-1.$$

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-1+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e-1.$$

2.169. a') Este evident că:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{rf(k-1)+f(k)} + \frac{r-1}{f(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(a_k+r)\,f(k-1)} + \frac{r-1}{f(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}f(k-1)} + \frac{r-1}{f(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}a_k f(k-1)} + \frac{r-1}{f(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k + r - 1}{f(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-1}{f(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}\right) = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{f(n+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad (1)$$

b') Vom arăta că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton și mărginit de unde va rezulta că este convergent

Monotonia: Conform relației (1) avem:

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f(n+1)} - \frac{1}{a} + \frac{1}{f(n)} =$$

$$= \frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)\cdot f(n+1)} = \frac{a_{n+1}-1}{f(n+1)}. \qquad (2)$$

Deoarece $a \geqslant 1$, $r > 0$, atunci șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător, deci:

$$a_{n+1} - 1 > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

iar relația (2) ne arată că:

$$b_n - b_{n-1} > 0,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

adică șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

Mărginirea. Deoarece:

$$a_n > 1, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

atunci $f(n) > 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ și deci:

$$0 < \frac{1}{f(n)} < 1, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci relația (1) ne arată că:

$$b_n \in (0, 1), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit. Fiind monoton și mărginit atunci $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ (este convergent). Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{f(n+1)}\right) = \frac{1}{a} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{a} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} = \frac{1}{a}.$$

c°). Este evident că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot f(n) \cdot \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{f(n+1)}\right)^{a_n f(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{f(n+1)}\right)^{f(n+1)}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \ln e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}} =$$

$$= \ln e^{-1} = -1.$$

Pe de altă parte:

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{f(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{f(n+1)}\right)^{a_{n+2} f(n+k)} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2}} = 0.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n f(n) \ln b_n - \lim_{n\to\infty} b_n^{f(n+2)} = 1 - 1 + 0 = 0.$$

2.170. Din modul cum a fost definit şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$ şi:

$$x_{n+1} < x_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_n = x \in \mathbf{R}^*$$

echivalent cu:

$$(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

astfel încît:

$$-\varepsilon + x < a_n x_n < \varepsilon + x,\ (\forall)\ n > n_\varepsilon$$

adică echivalent cu:

$$\frac{-\varepsilon + x}{a_n} < x_n < \frac{\varepsilon + x}{a_n},\ (\forall)\ n > n_\varepsilon.$$

De aici, prin trecere la limită, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Notînd:

$$y_n = \frac{1}{x_n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

rezultă că $y_n \in \mathbf{R}_+^*$, şi:

$$y_{n+1} > y_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N} \text{ cu } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Deci:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + b a_n x_n^2},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

echivalent cu:

$$y_{n+1} = y_n + b \cdot \frac{a_n}{y_n}\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Din $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = x$ şi atunci:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

echivalent cu:

$$\lim (y_{n+1} - y_n) = bx.$$

Din relația:

$$y_{n+1} - y_n = b \cdot \frac{a_n}{y_n}$$

prin aplicarea teoremei CESARO-STOLZ obținem:

$$bx = \lim_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = b \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \frac{a}{x}$$

echivalent cu $x^2 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right\}$, și deoarece $x > 0$ rezultă $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

2.171. Din:

$$a_{n+1} - 4a_n + 4a_n^2 = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

rezultă că:

$$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Dacă $a_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ atunci este evident că:

$$a_n(1 - a_n) < 0$$

ceea ce arată că:

$$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) < 0, \ (\forall)\ a_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Deoarece $a_{1977} = 1$ rezultă că neapărat $a_0 \in [0, 1]$ și atunci $(\exists)\ x \in \mathbf{R}$ astfel încît $a_0 = \sin^2 x$.

Avem atunci că:

$$a_1 = 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^2 2x.$$

Presupunem că:

$$a_n = \sin^2 2^n x;$$

atunci:

$$a_{n+1} = 4\sin^2 2^n x(1 - \sin^2 2^n x) = 4\sin^2 2^n x \cos^2 2^n x =$$

$$= \sin^2 2^{n+1} x.$$

Conform principiului inducției complete rezultă că:

$$a_n = \sin^2 2^n x, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare:

$$a_{1977} = \sin^2 2^{1977} x = 1$$

echivalent cu, $\sin 2^{1977} x = \pm 1 \Leftrightarrow 2^{1977} x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbf{Z}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left\{k \cdot \frac{\pi}{2^{1977}} + \frac{\pi}{2^{1978}}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ și deci:

$$a_0 \in \left\{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2^{1977}} + \frac{\pi}{2^{1978}}\right)\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

2.172. Avem:

$$0 < x_n < x_1 + x_1 + \ldots + x_1 = n x_1$$

și deci $0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Deci șirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit superior și inferior.

Prin urmare dacă notăm $\alpha = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}^*}\left(\frac{x_n}{n}\right)$ atunci pentru $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$\alpha \leqslant \frac{x_m}{m} < \alpha + \varepsilon/2.$$

Fie $n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$n = qm + r, r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

și deci considerînd $x_0 = 0$ avem:

$$x_n = x_{qm+r} \leqslant \underbrace{x_m + x_m + \ldots + x_m}_{q \text{ ori}} + x_r = q x_m + x_r$$

și atunci:

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \leqslant \frac{q x_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m} \cdot \frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n}$$

Deci:

$$\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \varepsilon/2 + \frac{x_r}{n}.$$

Deoarece $0 \leqslant r \leqslant m-1$ și x_r este mărginit atunci $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$0 \leqslant \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\, n > n_\varepsilon.$$

Prin urmare, avem:

$$\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon,\ (\forall)\, n > n_\varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

2.173. Avem:

$$x_2 = \sqrt{k+1},\ x_3 = \sqrt{k+k+1} = \sqrt{2k+1},$$
$$x_4 = \sqrt{x_3 + k} = \sqrt{2k+1+k} = \sqrt{3k+1}.$$

Prin inducție matematică rezultă:

$$x_n = \sqrt{(n-1)k+1}.$$

2.174. Avem:

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 1+k,\ a_3 = k^2+3k+1$$

iar din relația de recurență:

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + k}{a_{n-2}}$$

obținem imediat:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + k,\ a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + k$$

de unde rezultă:

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n a_{n-2} = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_n + a_{n-2}),\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Prin urmare:

$$a_1(a_3 + a_1) = a_2(a_2 + a_0)$$
$$a_2(a_4 + a_2) = a_3(a_3 + a_1)$$
$$a_3(a_5 + a_3) = a_4(a_4 + a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_n + a_{n-1})$$

de unde, dacă ținem seama că $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, înmulțim aceste relații și facem simplificările posibile, obținem:

$$a_1 (a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n (a_2 + a_0)$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} = (k + 2)\, a_n - a_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}$ presupunînd că $a_{n-1}, a_n \in \mathbf{Z}$, din relația precedentă rezultă prin metoda inducției matematice că $a_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

2.175. Din modul cum este construit șirul, rezultă că $a_n > 0$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Vom demonstra mai departe că șirul $(a_n)_{n \geq m}$ este monoton și mărginit, de unde va rezulta că este convergent.

Dacă șirul $(a_n)_{n \geq m}$ este convergent atunci și șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent și ele au aceeași limită (cele două șiruri diferă printr-un număr finit de termeni).

Ne ocupăm deci de șirul $(a_n)_{n \geq m}$.

Monotonia. Avem:

$$a_{m+1} = \alpha a_m + \beta \text{ de unde rezultă:}$$

$$a_{m+1}^2 = \alpha a_m + \beta.$$

Prin urmare, avem:

$$a_{m+1}^2 - a_m^2 = \alpha a_m + \beta - a_m^2 > 0.$$

În concluzie:

$$a_{m+1} > a_m.$$

Vom presupune că pentru un $n \geq m$ avem:

$$a_n > a_{n-1}$$

și vom demonstra că:

$$a_{n+1} > a_n.$$

În adevăr:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \alpha a_n + \beta - a_{n-1} - \beta = \alpha (a_n - a_{n-1}) > 0,$$

deci $a_{n+1} > a_n$.

Cu aceasta am demonstrat că șirul $(a_n)_{n \geq m}$ este **strict** crescător.

Mărginirea. Este evident că:

$$a_n^2 = \alpha a_{n-1} + \beta,$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ și atunci pentru $n \geqslant m$ avem $a_n > a_{n-1}$.

Deci din egalitatea precedentă obținem:

$$a_n^2 - \alpha a_n - \beta > 0,$$

oricare ar fi $n \geqslant m$.

Din ultima inegalitate rezultă că:

$$a_n \in \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad \alpha + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \right)$$

oricare ar fi $n \geqslant m$.

Deci șirul $(a_n)_{n \geqslant m}$ este mărginit.

În concluzie, șirul $(a_n)_{n \geqslant m}$ fiind monoton și mărginit este convergent adică are limită finită.

Să notăm $l = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant m}} a_n$; atunci trecînd la limită în relația

$$a_n^2 = \alpha a_{n-1} + \beta$$

obținem $l^2 = \alpha l + \beta$, de unde rezultă că:

$$l = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Deoarece șirul este crescător rezultă deci că:

$$l = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

În concluzie, șirul inițial este convergent și:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant m}} a_n = l = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

2.176. Din modul cum a fost definit rezultă că $a_n > 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$

Să demonstrăm că:

$$a_{n+1} > a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Într-adevăr:

$$a_1^k - a_0^k = \beta + \alpha - \alpha^k > 0$$

de unde rezultă:

$$(a_1 - a_0)\,(a_1^{k-1} + a_1^{k-2}\,a_0 + \ldots + a_1\,a_0^{k-2} + a_0^{k-1}) > 0$$

și deci:

$$a_1 - a_0 > 0 \Leftrightarrow a_1 > a_0.$$

Presupunem că pentru orice $n \leqslant p$ avem $a_{n+1} > a_n$ și să demonstrăm că $a_{p+2} > a_{p+1}$.

Într-adevăr:

$$a_{p+2}^k - a_{p+1}^k = \beta + a_{p+1} - \beta - a_p = a_{p+1} - a_p > 0$$

și deci:

$$a_{p+2} - a_{p+1} > 0.$$

Prin urmare:

$$a_{n+1} > a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

adică șirul este strict crescător.

Mărginirea. Avem:

$$a_{n+1}^k = \beta + a_n \text{ și } a_{n+1} > a_n$$

de unde rezultă:

$$a_n^k < \beta + a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

adică:

$$a_n(a_n^{k-1} - 1) < \beta,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

și deci:

$$a_n(a_n - 1)\,(a_n^{k-2} + a_n^{k-3} + \ldots + a_n + 1) < \beta,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare:

$$a_n(a_n - 1) \cdot (k - 1) < \beta,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

de unde rezultă:

$$a_n(a_n - 1) < \beta,\ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

și deci:

$$a_n \in \left(1,\ \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}{2}\right),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

ceea ce probează că șirul este mărginit.

2.177. Este evident că:

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1^2}{2}, \tag{1}$$

$$x_2 - x_3 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}, \tag{2}$$

$$x_3 - x_4 = \frac{x_3^2 - x_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Adunînd (1) cu (2) și (2) cu (3), obținem:

$$x_1 - x_3 = \frac{x_2^2}{2} > 0, \quad x_2 - x_4 = \frac{x_3^2 - x_1^2}{2} < 0.$$

Prin inducție completă rezultă că:

$$x_{2m} < x_{2m+2} \text{ și } x_{2m+1} > x_{2m+3}, \ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^*.$$

Deci:

$$x_1 > x_3 > x_5 > \ldots > x_{2m+1} > x_{2m+3} > \ldots \tag{4}$$

$$x_2 < x_4 < x_6 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+2} < \ldots \tag{5}$$

Vom arăta că șirul dat este mărginit. Avem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Să presupunem că:

$$|x_k| < \frac{1}{2}, \ (\forall)\, k \leqslant m$$

și să demonstrăm că $|x_{m+1}| < \frac{1}{2}$. Într-adevăr, din $|x_m| < \frac{1}{2}$ rezultă că:

$$0 > -\frac{x_m^2}{2} > -\frac{1}{8}$$

și atunci rezultă că:

$$|x_{m+1}| = \left|\frac{a}{2} - \frac{x_m^2}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

și deci conform principiului inducției complete obținem că

$$|x_n| < \frac{1}{2}, \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci şirurile (4) şi (5), fiind strict monotone şi mărginite, sînt convergente.

Fie deci:

$$u = \lim_{m \to \infty} x_{2m+1},\ v = \lim_{n \to \infty} x_{2m}.$$

Din egalitatea:

$$x_{2n} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n-1}^2}{2}$$

prin trecere la limită obţinem:

$$u - v = \frac{u^2 - v^2}{2}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$(u - v)(u + v - 2) = 0. \tag{6}$$

Egalitatea $u + v - 2 = 0$ nu este posibilă deoarece $|x_n| < \frac{1}{2}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ şi deci din (6) obţinem $u - v = 0$ deci $u = v$.

Din egalitatea:

$$x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}$$

deducem prin trecere la limită că $u = \frac{a}{2} - \frac{u^2}{2}$, de unde $u = \sqrt{1 - a} - 1$.

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{1 + a} - 1.$$

2.178. a°). Din:

$$a_{k+1} = a_k + r$$

pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1, n\}$ obţinem:

$$a_{k+1}^p = a_k^p + C_p^1 a_k^{p-1} r + C_p^2 a_k^{p-2} r^2 + \ldots + C_p^{p-1} a_k r^{p-1} + C_p^p r^p,$$

$$a_{k+1}^p - a_k^p = C_p^1 a_k^p r + C_p^2 a_k^{p-2} r^2 + \ldots + C_p^{p-1} a_k r^{p-1} + C_p^p r^p,$$

pentru $k \in \{1, 2, ..., n\}$ și însumînd rezultă:

$$a_{n+1}^p - a_1^p = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}^p - a_k^p) = C_p^1 r \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-1} +$$

$$+ C_p^2 r^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-2} + ... + C_p^{p-1} r^{p-1} \sum_{k=1}^{n} a_k + C_p^p r^p \sum_{k=1}^{n} a_k^0,$$

adică formula cerută.

b°). Presupunînd formula de la a°) adevărată pentru orice n și orice p natural obținem pentru orice n, făcînd $p = 1$, $a_{n+1} - a_1 = nr$ și prin urmare șirul $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ formează o progresie aritmetică cu rația r.

c°). Făcînd $p = 2$ în formula de la a°) rezultă:

$$a_{n+1}^2 = 2r\, S_1 + r^2 n$$

din care deducem:

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Pentru $p = 3$, ținînd seama de forma lui S_1 rezultă:

$$S_2 = \frac{n(2(a_1^2 + a_n^2) + (a_n - a_1)r + 2a_1 a_n)}{6}$$

și pentru $p = 4$ se obține:

$$S_3 = \frac{n((a_1^2 + a_n^2)(a_1 + a_n - r) + 2a_n^2 r)}{4}.$$

Prin urmare:

$$E_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + ... + a_{n-1} a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k (a_k + r) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + r \sum_{k=1}^{n-1} a_k =$$

$$= \frac{(n-1)(2(a_1^2 + a_{n-1}^2) + (a_{n+1} - a_1)r + 2a_1 a_{n-1})}{6} +$$

$$+ \frac{(n-1)r(a_1 + a_{n-1})}{2}.$$

2.179. 1°). În primele $2n-1$ linii se află un număr de:

$$1 + 2 + \ldots + 2n - 1 = \frac{(2n-1)2n}{2} = n(2n \quad 1)$$

termeni și deci în linia cu numărul de ordine $2n$ se află termenii:

$$n(2n-1)+1,\ n(2n-1)+2,\ \ldots,\ n(2n-1)+2n = 2n^2+n$$

deci această linie începe cu termenul x_{2n^2-n+1}

2°). Este evident că:

$$x_n = 1 + (n-1)2 = 2n-1,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

iar linia a n-a începe cu $x_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ și se termină cu $x_{\frac{n(n+1)}{2}}$ și atunci:

$$x_{\frac{n(n-1)}{2}+1} + x_{\frac{n(n-1)}{2}+2} + \ldots + x_{\frac{n(n+1)}{2}} =$$

$$= n(n-1) + 1 + n(n-1) + 3 + \ldots + n(n-1) - 1 =$$

$$= n(n-1) + 1 + n(n-1) + 3 + \ldots + n(n-1) + (2n-1) =$$

$$= n^2(n-1) + (1 + 3 + \ldots + (2n-1)) =$$

$$= n^2(n-1) + \frac{(2n-1)2n}{2} - 2\frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= n^2(n-1) + n(2n-1) - n(n-1) = n(n(n-1) +$$

$$+ 2n - 1 - n + 1) = n(n^2 - n + 2n - 1 - n + 1) = n^3,$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

3°). Termenul al m-lea de pe linia a n-a este dat de formula $n(n-1) + 2m - 1$ și atunci avem:

$n^2 - n + 2m - 1 = 211716$, cu rădăcina $n = \frac{1 \quad \sqrt{86865 - 8m}}{2}$

și deoarece radicalul trebuie să fie un număr natural impar rezultă $86865 - 8m = 293^2$ și deci $n = 147$, iar $m = 127$.

Rezultă deci că numărul 21716 se află pe linia 147 și anume al 127-lea termen al acestei linii.

2.180. Din:

$$x_{n+1} = |x_n + 1|, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

prin ridicare la pătrat obținem:

$$x_{n+1}^2 = 1 + 2x_n + x_n^2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

De aici rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 = n + 2\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_{n+1}^2 = n + 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

de unde rezultă:

$$n + 2\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

adică:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \geqslant -\frac{1}{2}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

2.181. Din inegalitatea lui CAUCHY-BUNEAKOVSKI obținem:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geqslant n^2.$$

Deci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} \geqslant \frac{n^2}{n+1},$$

de unde prin trecere la limită rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = +\infty.$$

2.182. Din faptul că $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este o progresie aritmetică rezultă că $(\exists)\, r \in \mathbf{R}^*$ astfel încît:

$$a_{n+1} = a_n + r, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\Delta a_n = r, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

de unde:

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta r = 0, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$\Delta^2 a_n = 0, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce implică:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

adică echivalent cu $(\exists)\ r \in \mathbf{R}^*$ astfel încît:

$$a_{n+1} - a_n = r, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

deci echivalent cu:

$$a_{n+1} = a_n + r, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

adică $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este o progresie aritmetică.

2.183. *Soluția I.* Vom demonstra prin inducție completă că:

$$u_n = 1 + (1 + (-1)^n)2^n. \tag{1}$$

Într-adevăr:

$n = 0$ implică $u_0 = 1 + (1 + 1) \cdot 1 = 3$

$n = 1$ implică $u_1 = 1 + (1 - 1) \cdot 2 = 1$

$n = 2$ implică $u_2 = 1 + 2 \cdot 2^2 = 9$.

Presupunem că pentru orice $n \leqslant k$ avem:

$$u_n = 1 + (1 + (-1)^n) \cdot 2^n$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem

$$u_{k+1} = 1 + (1 + (-1)^{k+1}) \cdot 2^{k+1}.$$

Din relația de recurență dată în enunț avem:

$$u_{k+1} = u_k + 4u_{k-1} - 4u_{k-2} =$$

$$= 1 + (1 + (-1)^k) \cdot 2^k + 4 + 4(1 + (-1)^{k-1}) \cdot 2^{k-1} -$$

$$- 4 - 4(1 + (-1)^{k-2}) \cdot 2^{k-2} = 1 + 2^k + (-1)^k \cdot 2^k +$$

$$+ 2^{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1} - 2^k + (-1)^{k-1} \cdot 2^k =$$

$$= 1 + (1 + (-1)^{k+1}) \cdot 2^{k+1}.$$

Deci, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ atunci relația (1) este adevărată.

Soluția a II-a. Ecuația caracteristică a acestui șir liniar recurent este:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Deci:

$$u_n = A + B \cdot 2^n + C(-1)^n \cdot 2^n$$

și ținînd seama de condițiile inițiale rezultă: $A = B = C = 1$.

Prin urmare:

$$u_n = 1 + 2^n + (-1)^n \cdot 2^n.$$

2.184. Considerăm vectorii:

$$\vec{u} = \frac{2a_n}{1 + a_n^2} \cdot \vec{i} + \frac{1 - a_n^2}{1 + a_n^2} \cdot \vec{j},$$

$$\vec{v} = \frac{1 - a_{n-1}^2}{1 + a_{n-1}^2} \cdot \vec{i} + \frac{2a_{n-1}}{1 + a_{n-1}^2} \cdot \vec{j}.$$

Avem:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 1, \quad |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = 1$$

și prin urmare:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \, |\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}.$$

Deci:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}| \leqslant 1. \qquad (1)$$

Dar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{2a_n(1 - a_{n-1}^2) + 2a_{n-1}(1 - a_n^2)}{(1 + a_n^2)(1 + a_{n-1}^2)} =$$

$$= \frac{2a_n a_{n-1}(1 - a_n a_{n-1})}{(1 + a_n^2)(1 + a_{n-1}^2)} = 2a_{n+1}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$|2a_{n+1}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant 1$$

ceea ce este echivalent cu

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2},$$

adică șirul dat este mărginit.

2.185. Observăm că:

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \ldots, u_n =$$

$$= s_n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}.$$

Punînd $s_0 = 0$, așa încît $u_1 = s_1 - s_0$ și înlocuind în relația de recurență a șirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pe $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ în funcție de $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ obținem:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + a_2(s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) +$$

$$+ \ldots + a_k(s_n - s_{n-1}),$$

de unde rezultă:

$$s_{n+k} = (1 + a_1)s_{n+k-1} + (a_2 - a_1)s_{n+k-2} + \ldots +$$

$$+ (a_k - a_{k-1})s - a_k s_{n-1}$$

oricare ar fi $n \geqslant m$.

Înlocuind mai sus pe n cu $n + 1$ obținem:

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \ldots +$$

$$+ (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_k s_n$$

oricare ar fi $n \geqslant m - 1$.

Prin urmare, șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir recurent de ordinul $k + 1$.

2.186. a°). Avem:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos x + \cos x = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x},$$

$$a_3 = a_2 \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 2x}{\sin x} + \cos 2x = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

În continuare procedăm prin inducție completă. Presupunem:

$$a_k = \frac{\sin kx}{\sin x}, \quad (\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Atunci:

$$a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx = \frac{\sin nx}{\sin x} \cos x + \cos nx =$$

$$= \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}.$$

Rezultă că termenul general al șirului este:

$$a_n = \frac{\sin nx}{\sin x}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). Avem:

$$b_1 = 1 = \frac{\sin x}{\sin x}; \quad b_2 = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x};$$

$$b_3 = 2b_2 \cos x - b_1 = \frac{2 \sin 2x \cos x}{\sin x} - 1 =$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x + \sin x (2\cos^2 x - 1)}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Fie acum:

$$b_k = \frac{\sin kx}{\sin x}, \quad (\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Rezultă:

$$b_{n+1} = 2b_n \cos x - b_{n-1} = \frac{2 \sin nx \cos x}{\sin x} -$$

$$- \frac{\sin (n-1)x}{\sin x} = \frac{2 \sin nx \cos x}{\sin x} - \frac{\sin nx \cos x - \sin x \cos nx}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin nx \cos x + \sin x \cos nx}{\sin x} = \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}.$$

Deci, termenul general este:

$$b_n = \frac{\sin nx}{\sin x}.$$

2.187. Fie $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ șirul recurent de ordinul al doilea;

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

unde $y_1 = 0$ și $y_2 = 1$. Se observă atunci că:

$$y_{n+1} = x_n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Să găsim deci α și β numere reale astfel încît:

$$u_n = \alpha x_n + \beta y_n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Scriind că relația precedentă este valabilă pentru $n = 1$ și $n = 2$ obținem:

$$u_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha$$

$$u_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha + \beta$$

de unde $\alpha = u_1$ și $\beta = u_2 - u_1$.

Prin urmare:

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) y_n.$$

Pentru $n \geqslant 2$ avem:

$$y_n = x_{n-1},$$

deci:

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) x_{n-1} = u_1(x_n - x_{n-1}) + u_2 x_{n-1}, \ (\forall) n \geqslant 2.$$

Pentru $n \geqslant 3$ dacă ținem seama că:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$$

Obținem deci:

$$u_n = u_1 x_{n-2} + u_2 x_{n-1}$$

și enunțul este demonstrat.

2.188. a'). Cazul $n = 0$ implică $2a_0 = 5 - 1 = 4$ adică $a_0 = 2$ deci enunțul se verifică. Cazul $n = 1$ implică $a_1 = 3 \cdot a_0 + 1 = 7$ și $2 \cdot a_1 = 5 \cdot 3 - 1 = 14$ deci enunțul este verificat.

Presupunem că pentru $n = k$ avem:

$$a_k = \frac{5 \cdot 3^k - 1}{2}$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$a_{k+1} = \frac{5 \cdot 3^{k+1} - 1}{2}.$$

Într-adevăr:

$$a_{k+1} = 3 \cdot a_k + 1 = 3 \cdot \frac{5 \cdot 3^k - 1}{2} + 1 = \frac{5 \cdot 3^{k+1} - 3 + 2}{2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 3^{k+1} - 1}{2}.$$

Deci $(\forall) n \in \mathbf{N}$ avem $2a_n = 5 \cdot 3^n - 1$.

b'). Cazul $n = 0$ implică:

$$(x_0, y_0) = \left(x + \frac{2}{3}(y - x)(1 - 1),\ x - \frac{2}{3}(y - x)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= (x,\ x - y + x) = (x,\ y)$$

deci formula se verifică pentru $n = 0$.

Presupunem că pentru $n = k$ avem:

$$(x_k,\ y_k) = \left(x + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 - \frac{1}{4^k}\right),\ x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right)\right)$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$(x_{k+1},\ y_{k+1}) = \left(x + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right),\ x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(y - x)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}}\right)\right).$$

În adevăr:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = \left(\frac{1}{2}(x_k + y_k), \frac{1}{2}(x_{k+1} + y_k)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 - \frac{1}{4^k}\right) + x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right) + x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right)\right) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{3}(x-y)\left(1 - \frac{1}{4^k} + 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right),\ x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} + 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{3}(x-y)\left(2 - \frac{1}{2\cdot 4^k}\right),\ x + \frac{1}{3}(y-x)\left(2 + \frac{1}{4^{k+1}}\right)\right) =$$

$$= \left(x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right),\ x + \frac{2}{3}(y-x)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right)\right).$$

Cu aceasta am demonstrat că pentru $(\forall)n \in \mathbf{N}$ enunțul este adevărat.

2.189. Pentru orice $n \geqslant 2$ să notăm cu a_n restul împărțirii la 8 a lui x_n, iar cu b_n restul împărțirii la 8 a lui y_n.

Se obțin în acest mod șirurile de numere naturale $(a_n)_{n\geqslant 2}$ și $(b_n)_{n\geqslant 2}$ și vom demonstra prin inducție că:

$$a_{2k} = 3,\ a_{2k+1} = 5,\ b_{2k} = 1,\ b_{2k+1} = 7,\ (\forall)k \in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

Cazul $k = 1$ implică: $x_2 = 1 + 2 = 3$ deci $a_2 = 3$;
apoi $y_2 = 14 + 3 = 17$ deci $b_2 = 1$.
La fel, $x_3 = 3 + 2 = 5$ deci $a_3 = 5$;
$y_3 = 34 + 21 = 55$ deci $b_3 = 7$.

Presupunem că pentru $k = p$ avem:

$$\begin{cases} a_{2p} = 3,\ a_{2p+1} = 5 \\ b_{2p} = 1,\ b_{2p+1} = 7 \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\begin{cases} x_{2p} = \mathcal{M}\ 8 + 3,\ x_{2p+1} = \mathcal{M}\ 8 = 5 \\ y_{2p} = \mathcal{M}\ 8 + 1,\ y_{2p+1} = \mathcal{M}\ 8 + 7. \end{cases}$$

Să demonstrăm că și pentru $k = p + 1$ afirmația (1) este adevărată, adică:

$$a_{2p+2} = 3, \quad a_{2p+3} = 5,$$
$$b_{2p+2} = 1, \quad b_{2p+3} = 7.$$

În adevăr:

$$x_{2p+2} = x_{2p+1} + 2x_{2p} = \mathcal{M}8 + 5 + 2(\mathcal{M}8 + 3) = \mathcal{M}8 + 5 + 6 = \mathcal{M}8 + 3 \Rightarrow a_{2p+2} = 3,$$

$$x_{2p+3} = x_{2p+2} + 2x_{2p+1} = \mathcal{M}8 + 3 + 2(\mathcal{M}8 + 5) = \mathcal{M}8 + 3 + 10 = \mathcal{M}8 + 5 \Rightarrow a_{2p+3} = 5,$$

$$y_{2p+2} = 2y_{2p+1} + 3y_{2p} = 2(\mathcal{M}8 + 7) + 3(\mathcal{M}8 + 1) = \mathcal{M}8 + 14 + 3 = \mathcal{M}8 + 1 \Rightarrow b_{2p+2} = 1,$$

$$y_{2p+3} = 2y_{2p+2} + 3y_{2p+1} = 2(\mathcal{M}8 + 1) + 3(\mathcal{M}8 + 7) = \mathcal{M}8 + 2 + 21 = \mathcal{M}8 + 7 \Rightarrow b_{2p+3} = 7.$$

Deci, afirmația (1) este adevărată pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă ar exista m, $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ astfel încît $x_m = y_n$ atunci ar însemna că $a_m = b_n$ ceea ce este contradictoriu cu afirmația (1). Deci $(\forall)m,\ n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ atunci $x_m \neq y_n$.

2.190. Afirmația:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

este echivalată cu afirmația:

$$\Delta^2 a_n - \Delta a_n = 0$$

deci cu:

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convex atunci $\Delta^2 a_n \geqslant 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și atunci din (1) obținem:

$$\Delta a_n \geqslant 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a_1 \geqslant a_0.$$

Dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este concav atunci $\Delta^2 a_n \leqslant 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și atunci din (1) obținem:

$$\Delta a_n \leqslant 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_1 \leqslant a_0.$$

2.191. a). Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie aritmetică, atunci:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}\cdot x_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}+\frac{x_3-x_2}{x_2x_3}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}x_n}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

Deci relația din enunț este demonstrată.

b°). Demonstrăm prin inducție că dacă există relația:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n},\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*$$

atunci $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie aritmetică.

Pentru $n=3$ avem $x_1+x_3=2x_2$ care are termenii în progresie aritmetică. Considerăm că din relația:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}$$

rezultă că:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, sînt în progresie aritmetică.

Dacă n devine $n+1$, va rezulta

$$\frac{n-1}{x_1x_n}+\frac{1}{x_nx_{n+1}}=\frac{n}{x_1x_{n+1}}$$

de unde obținem:

$$x_{n+1}-x_n=r,\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

2.192. Din ecuația dată obținem:

$$x_i^{k+3}+ax_i^{k+2}+3x_i^{k+1}-x_i^k=0,\ (\forall)k\in\mathbf{N},\ i\in\{1,2,3\}$$

de unde rezultă că:

$$s_{k+3}+as_{k+2}+3s_{k+1}-s_k=0,\ (\forall)k\in\mathbf{N}$$

deci:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{k+3} + a\sum_{k=0}^{n} s_{k+2} + 3\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} s_k = 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

de unde:

$$S_n - s_0 - s_1 - s_2 + s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + aS_n - as_0 - as_1 + as_{n+1} + as_{n+2} + 3S_n - 3s_0 + 3s_{n+1} - S_n = 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$(a+3)S_n = (a+4)(s_0 - s_{n+1}) + (a+1)(s_1 - s_{n+2}) + s_2 - s_{n+3}$$

de unde pentru $a \neq -3$ rezultă că:

$$S_n = \frac{a+4}{a+3}(s_0 - s_{n+1}) + \frac{a+1}{a+3}(s_1 - s_{n+2}) + \frac{1}{a+3}(s_2 - s_{n+3}).$$

Dacă $a = -3$ atunci ecuația se scrie:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

și deci $s_n = 3$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, iar:

$$S_n = 3(n+1)$$

deci, prin trecere la limită, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 3.$$

2.193. Dacă $u, v \in \mathbf{R}_+$ atunci:

$$u + v \geqslant 2\sqrt{uv}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\sqrt{uv} \leqslant \frac{u+v}{2}$$

și atunci:

$$\sqrt{a_i a_j} \leqslant \frac{a_i + a_j}{2}, \ (\forall)i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad i < j,$$

de unde obținem:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \sqrt{a_i a_j} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i + a_j) = \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Rezultă că:

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{n-1}{2n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

și prin trecere la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ adică șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent la zero.

2.194. Fie ecuația:

$$x^2 - 3x - 1 = 0, \tag{1}$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Este evident că:

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = -1. \tag{2}$$

Din faptul că x_1, x_2 verifică ecuația (1) rezultă că:

$$x_1 = \frac{x_1^2 - 1}{3}, \quad x_2 = \frac{x_2^2 - 1}{3}. \tag{3}$$

Fie $s_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbf{N}^*$; atunci:

În cazul $n = 2k$ avem

$$s_{2k} = (x_1^k - x_2^k)^2 + 2(x_1 x_2)^k = ((x_1 - x_2)^2 \left(\frac{x_1^k - x_2^k}{x_1 - x_2}\right)^2 +$$

$$+ 2(-1)^k = (x_1 - x_2)^2 u_{k-1}^2 + 2(-1)^k. \tag{4}$$

Avem însă:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9 + 4 = 13$$

și atunci din (4) obținem:

$$x_1^{2k} + x_2^{2k} = 13u_{k-1}^2 + 2(-1)^k. \tag{5}$$

În cazul $n = 2k + 1$ avem:

$$s_{2k+1} = x_1 x_1^{2k} + x_2 x_2^{2k} = \frac{1}{3}\left((x_1^2 - 1)x_1^{2k} + (x_2^2 - 1)x_2^{2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left((x_1^{2k+2} + x_2^{2k+2} - (x_1^{2k} + x_2^{2k})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(13u_k^2 + 2(-1)^{k+1} - 13u_{k-1}^2 - 2(-1)^k\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(13(u_k^2 - u_{k-1}^2) - 4(-1)^k\right). \tag{6}$$

Dacă ținem seama că $\left[\frac{n}{2}\right]_* = k$ indiferent dacă $n = 2k$ sau $n = 2k + 1$ și dacă folosim șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu:

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

atunci relațiile (5) și (6) se pot scrie împreună astfel:

$$s_n = 3^{a_n}\left(13(-1)^n u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]_* - 1} - a_n u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]_*}\right) +$$

$$+ \left(3(-1)^n - 1\right)(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]_*}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*. \tag{7}$$

Pe de altă parte avem:

$$s_n(x_1 - x_2) = x_1^{n+1} - x_2^{n+1} - x_1 x_2(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})$$

și dacă ținem seama de (2) rezultă:

$$s_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = u_n + u_{n-2}. \tag{8}$$

Relațiile (7) și (8) demonstrează enunțul.

2.195. Evident, avem:

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{x_0} > x_0$$

și de asemenea:

$$x_2 = a + \frac{1}{x_1} < a + \frac{1}{x_0} = x_1 \text{ deci } x_2 > x_0.$$

De asemenea:

$$x_3 = a + \frac{1}{x_2} > a + \frac{1}{x_1} = x_2 \text{ și } x_3 = a + \frac{1}{x_2} < a + \frac{1}{x_0} = x_1.$$

Așadar, avem inegalitățile:

$$x_0 < x_2 < x_3 < x_1.$$

Să arătăm prin inducție relativ la n că:

$$x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n} < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1;$$

$$(\forall) n \in \mathbf{N}^*. \qquad (1)$$

Pentru $n = 1$ inegalitatea (1) este adevărată.

Fie $n \geqslant 1$ un număr pentru care inegalitatea (1) este adevărată.

Atunci:

$$a + \frac{1}{x_{2n-1}} < a + \frac{1}{x_{2n+1}} < a + \frac{1}{x_{2n}}$$

deci:

$$x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$$

și prin urmare:

$$a + \frac{1}{x_{2n+1}} < a + \frac{1}{x_{2n+3}} < a + \frac{1}{x_{2n}}$$

adică:

$$x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}.$$

Prin urmare avem:

$$x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$$

și deci inegalitatea (1) este adevărată $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Mai departe vom nota:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n},\ y = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}.$$

Deci trecînd la limită în relația:

$$x_m = a + \frac{1}{x_{m-1}}$$

pentru $m = 2n$ respectiv $m = 2n - 1$ obținem $x = a + \frac{1}{y}$ și $y = a + \frac{1}{x}$. De aici deducem că $x = y$ și deci:

$$x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4}).$$

2.196. Din condițiile date rezultă că:

$$a_{n+1} - a_n < 0,\ (\forall) n \in \mathbf{N},$$

ceea ce arată că șirul dat este strict descrescător.

Cum orice șir strict descrescător are limită admițînd că șirul nu este convergent rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Din faptul că:

$$0 \leqslant a_{n+1} + a_n,\ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

rezultă, prin trecere la limită, că:

$$0 \leqslant 2\lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow 0 < -\infty$$

ceea ce este o contradicție.

Contradicția provine din presupunerea absurdă că șirul nu este convergent.

2.197. *Monotonia.* Avem:

$$(p + q)u_{n+1} = u_n^2 + pq,\ (p + q)u_n = u_{n-1}^2 + pq$$

de unde obținem:

$$(p + q)\Delta u_n = (u_n + u_{n-1})\Delta u_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \qquad (1)$$

Din relația de recurență dată rezultă că:

$$u_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci din (1) rezultă că:

$$\operatorname{sign}(\Delta u_n) = \operatorname{sign}(\Delta u_{n-1}),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\operatorname{sign}(\Delta u_n) = \operatorname{sign}(\Delta u_0),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \tag{2}$$

Prin urmare:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0 = \frac{a^2 + pq - (p+q)a}{p\,q} \Rightarrow \operatorname{sign}(\Delta u_0) =$$

$$= \operatorname{sign}(a^2 - (p+q)a + pq).$$

Avem însă:

$$\operatorname{sign}(a^2 - (p+q)a + pq) = \begin{cases} 1\ , \text{ dacă } a \in [0, p) \cup (q, +\infty) \\ 0\ , \text{ dacă } a \in \{p, q\} \\ -1, \text{ dacă } a \in (p, q). \end{cases} \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă că:

— dacă $a \in [0, p) \cup (q, +\infty)$ atunci șirul este strict crescător;

— dacă $a \in \{p, q\}$ atunci șirul este constant;

— dacă $a \in (p, q)$ atunci șirul este strict descrescător.

Convergența. Dacă $a = p$ atunci $a_n = p$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, iar dacă $a = q$ atunci $a_n = q$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Dacă $a \in (p, q)$ atunci $u_n < u_{n-1} \Rightarrow u_n^2 < u_{n+1}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (p+q)u_n > u_n^2 + pq$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u_n \in (p, q),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Deci șirul fiind monoton și mărginit este convergent.

Fie $x = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$, atunci din relația de recurență obținem $x_1 = p$, $x_2 = q$ și cum șirul este descrescător rezultă că $x = \lim\limits_{n \to \infty} u_n = p$.

Dacă $a \in [0, p)$ se demonstrează prin inducție că $u_n < p$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și cum șirul este strict crescător rezultă că $(\exists) \lim\limits_{n \to \infty} u_n = p$.

Dacă $a > q$ atunci prin inducție rezultă că $u_n > q$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

În adevăr, să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x \in \mathbf{R}$, atunci din relația de recurență prin trecere la limită obținem rădăcinile: $x_1 = p$, $x_2 = q$ dar cum șirul este strict crescător și $u_n > q$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ rezultă că $x > q$.

Prin urmare presupunem că $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent în cazul că $a > q$ este absurdă.

2.198. Avem: $0 = a_0 = a_1 = 0 \leqslant a_2 = b$. Presupunînd că:

$$a_{n-1} \leqslant a_n,\ (\forall)\, n \leqslant k,\ k \in \mathbf{N}$$

și ținînd seama de relația de recurență obținem:

$$3(a_{n+1} - a_n) = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2),$$

de unde se deduce conform principiului inducției matematice următoarea inegalitate:

$$a_n \leqslant a_{n+1},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Deci șirul este monoton crescător.

Din ipoteza $0 \leqslant a_0 = a_1 < 1$ avem $a_1 < 1$ și presupunînd $a_n \leqslant 1$ obținem imediat că:

$$a_{n+1} = b + \frac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2) \leqslant b + \frac{2}{3} \leqslant 1.$$

Deci șirul este mărginit superior.

Fiind monoton și mărginit rezultă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ și din relația de recurență, obținem:

$$3a = 3b + a + a^2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a^2 - 2a + 3b = 0$$

de unde:

$$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3b}.\ \text{Dar}\ a_n \leqslant 1,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

deci $a \leqslant 1$ și prin urmare $a = 1 - \sqrt{1 - 3b}$.

2.199. Avem:

$$u_2 = au_1 + bu_0 + c = 2a + 3b + c$$

deci:

$$u_1 - u_0 = 2 - 3 = -1 < 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u_1 < u_0;\ u_2 - u_1 = 2a + 3b + c - 2 < 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u_2 < u_1.$$

Să presupunem că pentru $k \in \mathbf{N}$ avem:

$$u_{k+2} < u_{k+1} < u_k$$

atunci:

$$u_{k+3} - u_{k+2} = au_{k+2} + bu_{k+1} + c - au_{k+1} - bu_k - c =$$
$$= a(u_{k+2} - u_{k+1}) + b(u_{k+1} - u_k) < 0,$$

aceasta deoarece din presupunerea făcută avem:

$$u_{k+2} - u_{k+1},\ u_{k+1} - u_k < 0.$$

Prin urmare:

$$u_{k+3} - u_{k+2} < 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u_{k+3} < u_{k+2}$$

adică dacă:

$$u_{k+2} < u_{k+1} < u_k$$

atunci:

$$u_{k+3} < u_{k+2} < u_{k+1} < u_k.$$

Deoarece am arătat că $u_2 < u_1 < u_0$ conform principiului inducției matematice rezultă că șirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător.

Deoarece $a, b, c \in (0, +\infty)$, $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ din relația de recurență rezultă că $u_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Deoarece $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător rezultă că $0 < u_n < 3$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Șirul fiind monoton și mărginit rezultă că există $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in \mathbf{R}$.

Dacă ținem seama că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n-1}$ din relația de recurență obținem:

$$u = au + bu + c \Leftrightarrow u = \frac{c}{1 - a - b}.$$

Această deoarece $a + b < 2a + 3b + c < 2$, $a, b, c \in (0, +\infty) \Rightarrow a + b \neq 1$.

2.200. Scriind relația de recurență pentru $n \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, adunînd membru cu membru și ținînd seama că $a_0 = a_1 = 0$ obținem relația:

$$a_{m+1} - a_m = 1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}.$$

Scriind acum această relație pentru $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obținem:

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \\
a_3 - a_2 &= \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2} \\
a_4 - a_3 &= \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n - a_{n-1} &= \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2}, \\
a_{n+1} - a_n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},
\end{aligned}$$

de unde prin adunare rezultă:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{12}(2n + 1 + 3) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \Rightarrow a_n =$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Pentru $n \geqslant 2$ avem:

$$\frac{a_n}{n(n-1)} = \frac{(n-1)\,n(n+1)}{6n(n-1)} = \frac{n+1}{6}$$

și atunci obținem egalitatea

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{n+1}{6}}.$$

De aici rezultă, prin trecere la limită, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.201. Este evident că $y_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ și că:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1}^2 \geqslant 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce probează că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este crescător.

Dar:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}) = x_1 - x_n < x_1 < 1$$

adică șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit superior.

Cu aceasta am arătat că $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$. Avem:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

de unde rezultă că:

$$x_{n+1} < x_n, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \text{ și}$$

$$x_n > 0, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

Să notăm $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ atunci din:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2$$

obținem $x = x - x^2$ sau $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Din faptul că:

$$y_n = x_1 - x_n$$

rezultă imediat că:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = x_1.$$

2.202. Prin inducție matematică demonstrăm că:

$$x_{n+1} > x_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

În adevăr:

$$x_2 = (\sqrt{2})^{x_1} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}.$$

Presupunem că:

$$x_n > x_{n-1}$$

și să demonstrăm că $x_{n+1} > x_n$. Avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(\sqrt{2})^{x_n}}{(\sqrt{2})^{x_{n-1}}} = (\sqrt{2})^{x_n - x_{n-1}} > (\sqrt{2})^0 = 1.$$

Cu aceasta am demonstrat că șirul este strict crescător.

Mărginirea superioară. Avem $x_1 = \sqrt{2} < 2$; presupunem $0 < x_n < 2$ și să arătăm că $x_{n+1} < 2$. În adevăr:

$$x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n} < (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Fiind monoton și mărginit, șirul este convergent, deci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ unde $a \in (0, 2]$.

Trecînd la limită în relația de recurență obținem $a = 2^{\frac{a}{2}}$ deci $a^{\frac{2}{a}} = 2$. Se poate constata fără dificultate că, singurele soluții ale ecuației $a^{\frac{2}{a}} = 2$ sînt $a_1 = 2$ și $a_2 = 4$. Deoarece $a \in (0, 2]$ rezultă că $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

2.203. a°). Polinomul $p(x)$ admite rădăcinile 1 și 2. Conform teoremei lui BÉZOUT[1], pentru ca q_n să se dividă prin p, este necesar și suficient ca $q_n(1) = 0$ și $q_n(2) = 0$. Rezultă atunci că:

$$a_n + b_n = 1; \ 2a_n + b_n = 2^n.$$

Din acest sistem a_n și b_n se determină unic și anume $a_n = 2^n - 1$, iar $b_n = 2(1 - 2^{n-1})$.

[1] Bézout, Étienne (1730 – 1783)—matematician francez.

b°). Vom avea:

$$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1 = 3(2^n - 1) + 2(1 - 2^{n-1}) = 3a_n + b_n;$$

$$b_{n+1} = 2(1 - 2^n) = -2(2^n - 1) = -2a_n.$$

c°). Șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ va avea termenul general:

$$x_n = a_n + b_n = 2^n - 1 + 2 - 2^n = 1$$

și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.204. Deoarece $0 < a < b$ rezultă că $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și deci are sens $b_n = \ln a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Avem:

$$a_n = a_{n-1}^{1-q} \cdot a_{n-2}^{q},\ (\forall)\ n \geq 2$$

deci:

$$b_n = (1 - q)b_{n-1} + qb_{n-2},\ (\forall)\ n \geq 2.$$

Ecuația caracteristică a șirului liniar recurent $(b_n)_{n\geq 0}$ este:

$$x^2 - (1 - q)x - q = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -q$ și deci termenul general este:

$$b_n = A + (-1)^n Bq^n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

Avem:

$$b_0 = \ln a_0 = \ln a,\ b_1 = \ln a_1 = \ln b.$$

Deci $A + B = \ln a$ și $A - Bq = \ln b$ de unde obținem:

$$A = \frac{q \ln a + \ln b}{1 + q}$$

și prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \frac{q \ln a + \ln b}{1 + q}$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = (a^q b)^{\frac{1}{1+q}}.$$

2.205. Este evident că $a_2 = \operatorname{arctg} a_1 < a_1$ și deci presupunînd $a_n < a_{n-1}$ să demonstrăm că $a_{n+1} < a_n$. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = \operatorname{arctg} a_n - \operatorname{arctg} a_{n-1}$$

deci:

$$\operatorname{tg}(a_{n+1} - a_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{1 + a_n a_{n-1}}$$

și dacă ținem seama că $a_n \geqslant 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și $a_n - a_{n-1}$ (ipoteza inducției) rezultă:

$$\operatorname{tg}(a_{n+1} - a_n) < 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} - a_n \leqslant 0.$$

Deci șirul este descrescător și mărginit inferior de zero și prin urmare este convergent.

Fie $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ atunci din relația de recurență obținem

$$a = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

2.206. Să arătăm că:

$$x_n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \ldots a^{\frac{1}{2^n}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr pentru $n = 1$ avem $x_1 = \sqrt{a}$, iar dacă:

$$x_k = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} \ldots a^{\frac{1}{2^k}}$$

atunci:

$$x_{k+1} = \sqrt{a x_k} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x_k} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{8}} \ldots a^{\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

Deci în virtutea principiului inducției complete rezultă că:

$$x_n = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} \ldots a^{\frac{1}{2^n}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să punem:

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

atunci $x_n = a^{y_n}$ și cum:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = a^1 = a$.

Să observăm, în încheiere, că pentru $a > 1$ rezultă:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{y_{n+1}}}{a^{y_n}} = a^{(y_{n+1} - y_n)} = a^{1/(2^{n+1})} > a^0 = 1,$$

adică $x_{n+1} > x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

În timp ce pentru $0 < a < 1$ avem:

$$a^{\frac{1}{2^{n+1}}} < a^0 = 1, \text{ adică } x_{n+1} < x_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

2.207. Avem:

$$a_{n+2} = \frac{ka_{n+1} + a_n}{k+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$(k+1)a_{n+2} - ka_{n+1} - a_n = 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Ecuația caracteristică a acestui șir este:

$(k+1)x^2 - kx - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-1}{k+1}$.

Deci:

$$a_n = A + B\frac{(-1)^n}{(k+1)^n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

iar din condițiile inițiale obținem:

$$A = \frac{a + (k+1)b}{k+2},\quad B = \frac{k+1}{k+2} \cdot (a - b)$$

și deci:

$$a_n = \frac{a + (k+1)b}{k+2} + \frac{a - b}{k+2} \cdot \frac{(-1)^n}{(k+1)^{n-1}};\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

De aici deducem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a + (k+1)b}{k+2}.$$

2.208. Fie:

$$b_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right), \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Atunci:

$$b_n = \frac{1 + a_1}{a_1} \cdot \frac{1 + a_2}{a_2} \cdots \frac{1 + a_n}{a_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 + a_1}{a_2} \cdot \frac{1 + a_2}{a_3} \cdots \frac{1 + a_{n-1}}{a_n}\right)(1 + a_n) =$$

$$= \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}\right)(1 + a_n) = \frac{1}{n!}(1 + a_n)$$

deci,

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n!}(1 + a_n) - \frac{1}{(n-1)!}(1 + a_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n!}(1 + a_n - n(1 + a_{n-1})) = \frac{1}{n!}$$

și prin urmare $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n!}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

De aici deducem că:

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

2.209. Deoarece:

$$a_k \in \left(2^{k-1}, \left(\frac{9}{5}\right)^k\right), \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

rezultă:

$$a_4 < \frac{9}{5} + \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^3 < \left(\frac{9}{5}\right)^4$$

și $7 < a_4$. Deoarece $\left(\frac{9}{5}\right)^3 < 7$ rezultă $a_4 \in \left(\left(\frac{9}{5}\right)^3, \left(\frac{9}{5}\right)^4\right)$.

Se arată prin inducție că pentru $n > 3$, $a_n \in \left(\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}, \left(\frac{9}{5}\right)^n\right)$.

Cum am văzut, proprietatea este adevărată pentru $n = 4$; să presupunem că:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1} < a_k < \left(\frac{9}{5}\right)^k$$

pentru orice $k \in \{4, ..., n\}$ și să arătăm că:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^n < a_{n+1} < \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}.$$

Deoarece:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$$

rezultă atunci că:

$$a_{n+1} < \left(\frac{9}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{5}\right)^{n-2} < \left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}.$$

La fel se arată că $\left(\frac{9}{5}\right)^n < a_{n+1}$. Așadar:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1} < a_n < \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

pentru orice număr natural, și deci:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \frac{9}{5}$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{9}{5}$.

2.10. *Existența.* Din faptul că $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relația din enunț obținem că $(\forall) m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ rezultă $y_m \neq y_n$.

Din relația enunțului rezultă:

$$y_n^3 - y_m^3 = x_n - x_m, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}, \ m \neq n.$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_n^3 - x_n = y_m^3 - x_m, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}, \ m \neq n.$$

Prin urmare dacă notăm:

$$z_n = y_n^3 - x_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}$$

relația precedentă ne arată că șirul $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este constant, adică $(\exists)a \in \mathbf{R}$ a.î. $z_n = a$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$. Deci:

$$y_n = \sqrt[3]{x_n} = a, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

și deci:

$$y_0 = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{x_0} + a \Leftrightarrow a = 0.$$

Prin urmare $y_n = \sqrt[3]{x_n}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

Unicitatea. Presupunem că există $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \neq (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică enunțul $\Leftrightarrow (\exists)\, k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $u_k \neq y_k$. Avem: $y_k^3 - y_m^3 = x_k - x_m$, $u_k^3 - u_m^3 = x_k - x_m$, $(\forall)m \in \mathbf{N} - \{k\}$, ceea ce este echivalent cu:

$$y_k^3 - u_k^3 = y_m^3 - u_m^3, \ (\forall)m \in \mathbf{N} - \{k\},$$

de unde rezultă:

$$0 = y_0^3 - u_0^3 = y_k^3 - u_k^3.$$

Ultima egalitate ne dă: $y_k = u_k$, ceea ce este absurd.

2.211. Fie $b = u - v\sqrt{2} > 0$, deci:

$$b^n = x_n - y_n\sqrt{2}, \ \ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și prin urmare:

$$x_n = \frac{a^n + b^n}{2}, \ \ y_n = \frac{a^n - b^n}{2\sqrt{2}}, \ \ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Deci, prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \sqrt{2}.$$

Aceasta deoarece $0 < b < a$.

2.212. Fie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1) + \frac{1}{2}(2x_n^2 - 3x_n + 1) = x_n^2 - x_n + 1,$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1) - \frac{1}{2}(2x_n^2 - 3x_n + 1) = -x_n^2 + 2x_n,$$

$$(\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$b_{n+1} \leqslant x_{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

pentru cazul în care:

$$2x_n^2 - 3x_n + 1 \geqslant 0, \tag{1}$$

și:

$$b_{n+1} \geqslant x_{n+1} \geqslant a_{n+1}$$

pentru cazul în care:

$$2x_n^2 - 3x_n + 1 \leqslant 0. \tag{2}$$

Se poate constata că:

$$a_{n+1} > x_n,\ b_{n+1} > x_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* \text{ cu } x_n \in (0,\ 1).$$

Într-adevăr,

$$a_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n + 1 = (x_n - 1)^2 > 0$$

și:

$$b_{n+1} > x_n \Leftrightarrow -x_n^2 + 2x_n > x_n \Leftrightarrow x_n(x_n - 1) < 0,$$

ceea ce este evident adevărată pentru orice $x_n \in (0,\ 1)$.

Deci ținînd seama de inegalitățile (1) și (2) deducem (indiferent care din ele este adevărată) că:

$$x_{n+1} > x_n,\ (\forall)x_n \in (0,\ 1). \tag{3}$$

Demonstrăm prin inducție matematică faptul că:

$$x_n \in (0,\ 1),\ \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*. \tag{4}$$

Într-adevăr, pentru $n = 1$ avem $x_1 \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right) \subset (0,\ 1)$ conform ipotezei. Presupunem că pentru orice $n \leqslant k$ avem $x_n \in (0,\ 1)$ și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem $x_{k+1} \in (0,\ 1)$. Într-adevăr, fie $f,\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^2 + 2x$, atunci $x_k \in (0,\ 1)$ implică

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x_k) < f(1)$$

și:

$$g(0) < g(x_k) < g(1)$$

de unde rezultă:

$$0 < a_{k+1} < 1,\ 0 < b_{k+1} < 1$$

și de aici obținem:

$$x_{k+1} \in (0,\ 1).$$

Conform concluziei principiului inducției complete rezultă că (4) este adevărată $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$. Din (3) și (4) rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și mărginit, deci este convergent.

Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Am văzut mai sus că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit și anume $b_n \in (0, 1)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$. Pe de altă parte funcția g este strict crescătoare pe $[0, 1]$, $(x_n < x_{n+1}$ implică $g(x_n) < g(x_{n+1}) \Leftrightarrow b_{n+1} < b_{n+2})$ deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este și strict crescător, deci este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Vom demonstra că $b > \frac{1}{2}$. Într-adevăr, dacă presupunem că $b \leqslant \frac{1}{2}$, atunci șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ fiind strict crescător, rezultă $b_n \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și atunci din $b_{n+1} \leqslant x_{n+1}$ rezultă $g(b_{n+1}) \leqslant g(x_{n+1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -b_{n+1}^2 + 2b_{n+1} \leqslant b_{n+2},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Trecînd la limită în ultima inegalitate obținem $-b^2 + b \leqslant 0$ ceea ce este echivalent cu $b \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ iar aceasta contrazice $b \leqslant \frac{1}{2}$. Rezultă deci că $b > \frac{1}{2}$ și atunci $(\exists)n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $b_n > \frac{1}{2}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, $n > n_0$ și deci pentru orice $n > n_0$ avem:

$$\frac{1}{2} < a_n < x_n < b_n$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_n^2 - x_n + 1 < x_n < -x_n^2 + 2x_n$$

și prin trecere la limită rezultă:

$$x^2 - x + 1 \leqslant x \leqslant -x^2 + 2x$$

adică echivalent cu:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

2.213. Evident, $X \subset \mathbf{R}$ este mărginită dacă și numai dacă $(\exists)M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $X \subset (-M, M)$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n \in X$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Deci $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad (\forall)n \geqslant n_\varepsilon.$$

Prin urmare:

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad (\forall)n \geqslant n_\varepsilon$$

adică $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ a.î. pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$ avem:

$$|x_n y_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Prin reducere la absurd. Să presupunem că $X \subset \mathbf{R}$ ar fi nemărginită și totuși $(\forall)$ $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n \in X$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și $(\forall)$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. $X \subset \mathbf{R}$ este nemărginită $\Leftrightarrow (\forall)n \in \mathbf{N}^*$, $X \not\subset (-n, n)$ și deci $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)x_n \in X$ a.î. $x_n \notin (-n, n) \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} \notin (-1, 1)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Cu toate acestea, luînd $y_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ și deci pentru șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ construit mai sus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, ceea ce contrazice faptul că $\frac{x_n}{n} \notin (-1, 1)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Deci presupunerea este falsă și deci X este mărginită.

2.214. Dacă $x \in \left[0, \frac{r}{2}\right]$ atunci:

$$0 \leqslant \frac{r}{2}\{x\}_r \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^2 < \frac{r}{2},$$

iar dacă $x \in \left(\frac{r}{2}, r\right]$ atunci $0 \leqslant r - x < r - \frac{r}{2}$ și deci în acest caz:

$$0 \leqslant \frac{r}{2}(r - x) < \left(\frac{r}{2}\right)^2 < \frac{r}{2},$$

ceea ce ne arată că:

$$0 \leqslant \frac{r}{2}\{x\}_r < \frac{r}{2}.$$

Prin urmare:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{r}{2}\{x\}_r\right) = \frac{r}{2}\left\{\frac{r}{2}\{x\}_r\right\}_r = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \{x\}_r.$$

Prin inducție matematică rezultă că:

$$a_n(x) = \left(\frac{r}{2}\right)^n \{x\}_r, \quad (\forall)x \in [0, r[\text{ și } (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \{x\}_r \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^n = 0.$$

2.215*. Din modul cum a fost definit șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și deci are sens $\frac{x}{x_i}$, $(\forall)i \in \mathbf{N}^*$ adică șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este definit pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$y_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{x_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x + x_i}{x_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{a_{i+1}x_i} =$$

$$= \frac{a_1}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_1}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$y_j - y_{j-1} = \frac{a_1}{a_1 a_2 \dots a_{j+1}} \cdot \frac{x_{j+1}}{x_1} - \frac{a_1}{a_1 a_2 \dots a_j} \cdot \frac{x_j}{x_1} =$$

$$= \frac{a_1}{x_1 a_1 a_2 \dots a_j}\left(\frac{x_{j+1}}{a_{j+1}} - x_j\right) = \frac{a_1 x}{x_1 a_1 a_2 \dots a_j}, \quad (\forall)j \geqslant 2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_j = y_{j-1} + \frac{a_1 x}{x_1 a_1 a_2 \dots a_j}, \quad (\forall)j \geqslant 2.$$

De aici obținem:

$$\sum_{j=2}^{n} y_j = \sum_{j=2}^{n} y_{j-1} + \frac{a_1 x}{x_1} \cdot \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_j}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_n = x_1 + \frac{a_1 x}{x_1} \cdot \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_j} = \frac{x_1 + x}{x_1} + \frac{a_1 x}{x_1} \cdot \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_j} =$$

$$= \frac{x_1 + x}{x_1} + \frac{a_1 x}{x_1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_j} - \frac{x}{x_1} = 1 + \frac{a_1 x}{x_1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_j}$$

de unde obținem că $\lim_{n \to \infty} y_n = 1 + \frac{a_1 a x}{x_1}$.

Observație. Deoarece $r \in \mathbf{R}_+$, $a_1 > 1$ atunci

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} < \frac{1}{n!}$$

și deci:

$$0 < 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

deci $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i}$ există și este finită.

Aceasta deoarece:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e.$$

CAPITOLUL 3

PROBLEME ALESE

3.1. *Se consideră un șir* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de numere reale astfel încît:*

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că dacă $x_1 \leqslant x_2$, *atunci:*

a°). *Șirul* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este crescător, iar șirul* $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este descrescător.*

b°). *Pentru* $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *avem relația*

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n}.$$

c°). *Pentru* $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *are loc relația:*

$$2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1.$$

d°). *Să se deducă faptul că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent și are limita egală cu* $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$.

(Admitere, 1976, Facultatea de matematică)

Soluție. a°). Vom raționa prin inducție. Se arată întîi că:

$$x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_2.$$

Într-adevăr avem:

$$x_3 - x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{2} \geqslant 0$$

și:

$$x_4 - x_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{2} =$$

$$= \frac{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2^2} \geqslant 0.$$

În fine:

$$x_2 - x_4 = x_2 - \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{x_2 - x_3}{2} \geqslant 0.$$

Să admitem că:

$$x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1} \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n-2} \leqslant \ldots \leqslant x_2. \quad (1)$$

Vom arăta că:

$$x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1} \leqslant x_{2n+1} \leqslant x_{2n+2} \leqslant x_{2n} \leqslant$$
$$\leqslant x_{2n-2} \leqslant \ldots \leqslant x_2. \quad (2)$$

Într-adevăr:

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} - x_{2n-1} = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2} \geqslant 0,$$

$$x_{2n+2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n} - x_{2n+1}}{2} =$$

$$= \frac{x_{2n} - \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}}{2} = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2^2} \geqslant 0$$

și, în sfîrșit:

$$x_{2n} - x_{2n+2} = x_{2n} - \frac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2} = \frac{x_{2n} - x_{2n+1}}{2} \geqslant 0.$$

Din (1) și (2) rezultă conform principiului inducției complete că:

$$x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1} \leqslant x_{2n+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{2n} \leqslant$$
$$\leqslant x_{2n-2} \leqslant \ldots \leqslant x_2. \quad (3)$$

b°). Dacă $n = 1$, relația care trebuie demonstrată este:

$$|x_3 - x_2| = \frac{|x_2 - x_1|}{2},$$

adică:

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right| = \frac{|x_2 - x_1|}{2},$$

ceea ce este evident. Să admitem că:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n};$$

atunci:

$$|x_{n+3} - x_{n+2}| = \left|\frac{x_{n+1} + x_{n+2}}{2} - x_{n+2}\right| =$$

$$= \frac{|x_{n+2} - x_{n+2}|}{2} = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n \cdot 2} = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n+1}}.$$

Deci, prin inducție, am demonstrat și această afirmație.

c°). Pentru $n = 1$, relația de demonstrat este:

$$2x_3 + x_2 = 2x_2 + x_2;$$

adică:

$$(x_1 + x_2) + x_2 = 2x_2 + x_1;$$

ceea ce este evident. Să admitem că:

$$2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1.$$

Atunci:

$$2x_{n+3} + x_{n+2} = (x_{n+1} + x_{n+2}) + x_{n+2} = 2x_{n+2} +$$
$$+ x_{n+1} = 2x_2 + x_1.$$

d°). Din a°) și relația b°) rezultă că există $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$x_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_1 \leqslant l_2 = \lim_{n\to\infty} x_{2n} \leqslant x_2.$$

Din b°) rezultă prin trecere la limită că $|l_1 - l_2| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2 \Leftrightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și deci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l = l_1 = l_2.$$

Din c°) prin trecere la limită obținem: $3l = 2x_2 + x_1$ de unde rezultă: $l = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$.

Un exemplu de astfel de șir este șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietatea că:

$$x_n = x_{n+1},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

3.2. *Să se demonstreze că oricare ar fi* $a \in (0, +\infty)$ *și oricare ar fi șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *strict crescător și nemărginit cu* $x_0 > 0$ *avem:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a + x_n)}{x_n^k} = 0$$

oricare ar fi $k \in \mathbf{N}^*$.

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Este evident că există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $a \leqslant x_{n_0}$ și $a < x_n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, $n_0 < n$.

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant n_0$ avem:

$$\ln(a + x_n) \leqslant \ln 2x_n = \ln 2 + \ln x_n.$$

Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit rezultă că există $n_1 \geqslant n_0$ astfel încît pentru orice $n > n_1$ să avem:

$$0 < \ln(a + x_n) \leqslant \ln 2 + \ln x_n.$$

Din ultimile inegalități prin împărțire cu x_n^k obținem că:

$$0 < \frac{\ln(a + x_n)}{x_n^k} \leqslant \frac{\ln 2}{x_n^k} + \frac{\ln x}{x_n^k},\quad (\forall)n > n_1$$

de unde prin trecere la limită obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a + x_n)}{x_n^k} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x}{x_n^k}. \qquad (1)$$

Dacă vom demonstra că pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^k} = 0$$

rezultă că enunțul este adevărat (pe baza lui (1)).

Știm că pentru orice $\alpha \geqslant 1$ avem $\alpha > \ln \alpha$ și atunci dacă ținem seama că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și

nemărginit, rezultă că $(\exists)n_2 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $x_n > 1$, $(\forall)n > n_2$ și deci:

$$0 \leqslant \frac{\ln x_n}{x_n^k} = \frac{\ln \left(x_n^{\frac{k}{2}}\right)^{\frac{2}{k}}}{x_n^k} = \frac{2}{k} \cdot \frac{\ln x_n^{\frac{k}{2}}}{x_n^k} \leqslant \frac{2}{k} \cdot \frac{x_n^{\frac{k}{2}}}{x_n^k} =$$

$$= \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{x_n^{\frac{k}{2}}}; \quad (\forall)n > n_2.$$

Șirul din enunț fiind strict crescător și nemărginit rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{\frac{k}{2}}} = 0.$$

Trecînd la limită în inegalitățile (2) obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^k} = 0.$$

Cu aceasta enunțul este demonstrat.

3.3 *Se dau șirurile* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *și* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definite în felul următor:*

$$a_n = \frac{pa_{n-1} + qb_{n-1}}{p+q}, \quad b_n = \frac{ma_{n-1} + kb_{n-1}}{m+k}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

unde $pk > mq$; $p, q, m, k, n \in \mathbf{N}^*$ *și* $a_0 < b_0$. *Să se studieze natura celor două șiruri.*

Soluție. Avem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{q(b_n - a_n)}{p+q}, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{m(a_n - b_n)}{m+k},$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(m+k)pa_n + (m+k)qb_n - (p+q)ma_n - (p+q)kb_n}{(m+k)(p+q)} =$$

$$= \frac{(mp + kp - mp - mq)a_n + (mq + kq - pk - qk)b_n}{(m+k)(p+q)} =$$

$$= \frac{(kp - mq)(a_n - b_n)}{(m+k)(p+q)}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece $a_0 < b_0$ și $pk - mq > 0$ prin inducție rezultă că:

$$a_n - b_n < 0,\ b_{n+1} - b_n < 0,\ a_{n+1} - a_n > 0,\ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător, șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător și:

$$a_n < b_n,\ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Termenii celor două șiruri se pot scrie astfel:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < b_{n-1} <$$
$$< \ldots < b_2 < b_1 < b_0.$$

Fiind monotone și mărginite rezultă că ele sînt convergente.

Dacă:

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n,\ y = \lim_{n\to\infty} b_n$$

atunci din relațiile de recurență obținem prin trecere la limită că: $(p + q)x = px + qy \Leftrightarrow x = y$.

3.4*. *Se consideră șirul de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență:*

$$a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1} = a_n - 1,$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Să se stabilească dacă șirul are limită sau nu. În cazul $a_{1976} = 40$, *să se determine șirul.*

(D.M. Bătineţu, G.M., 1608I).

Soluție. Relația de recurență a șirului din enunț se mai scrie:

$$a_{n+1}a_n + a_{n+1} + 1 = a_n, \qquad (1)$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Din relația de recurență (1) rezultă că $a_n \notin \{-1, 0, 1\}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, să presupunem că există un $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $a_n \in \{-1, 0, 1\}$. Sînt de analizat următoarele trei situații:

1°). $a_n = -1$. În acest caz, din relația de recurență (1), obținem:

$$-a_{n+1} + a_{n+1} + 1 = -1$$

ceea ce este echivalent cu $1 = -1$, deci o absurditate.

Prin urmare $a_n = -1$ nu este posibil.

2°). $a_n = 0$. Din (1) rezultă:

$$a_{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = -1,$$

iar acest rezultat contrazice cele demonstrate mai sus. Deci nu este posibil ca $a_n = 0$.

3°). $a_n = 1$. În acest caz din (1) obținem

$$a_{n+1} + a_{n+1} + 1 = 1$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} = 0,$$

iar aceasta contrazice demonstrațiile anterioare. În concluzie, $a_n \notin \{-1, 0, 1\}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$;.

Vom demonstra în continuare că șirul dat este periodic de perioadă $T = 4$. Într-adevăr, fie $m \in N$ un număr natural arbitrar. Din cele arătate rezultă că $a_m \notin \{-1, 0, 1\}$ și atunci din (1) rezultă:

$$a_{m+1} = \frac{a_m - 1}{a_m + 1} \tag{2}$$

relație care are sens deoarece $a_m \neq -1$.

Din relația (1) și (2) obținem:

$$a_{m+2} = \frac{a_{m+1} - 1}{a_{m+1} + 1} = \frac{\frac{a_m - 1}{a_m + 1} - 1}{\frac{a_m - 1}{a_m + 1} + 1} = \frac{a_m - 1 - a_m - 1}{a_m - 1 + a_m + 1} = -\frac{1}{a_m} \tag{3}$$

relație care are sens deoarece $a_m \neq 0$.

Pe baza relațiilor (1) și (3) rezultă.

$$a_{m+3} = \frac{a_{m+2} - 1}{a_{m+2} + 1} = \frac{-\frac{1}{a_m} - 1}{-\frac{1}{a_m} + 1} = -\frac{1 + a_m}{1 - a_m}, \tag{4}$$

relație care are sens deoarece $a_m \neq 1$.

De asemenea, din relațiile (1) și (4) obținem:

$$a_{m+4} = \frac{a_{m+3} - 1}{a_{m+3} + 1} = \frac{-\frac{1 + a_m}{-1 + a_m} - 1}{-\frac{1 + a_m}{-1 + a_m} + 1} =$$

$$= \frac{-1 - a_m + 1 - a_m}{-1 - a_m - 1 + a_m} = a_m. \qquad (5)$$

Prin urmare $a_{m+4} = a_m$ și dacă ținem seama că m a fost arbitrar luat în mulțimea $\mathbf{N}$, rezultă că $a_{n+4} = a_n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, adică șirul este $\mathbf{m}$-periodic de perioadă $T = 4$.

Faptul că șirul este $\mathbf{m}$-periodic de perioadă $T = 4$ se mai scrie și astfel:

$$a_n = a_r, \qquad (6)$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, unde r este restul împărțirii lui n la 4, adică $n = 4k + r$.

Dacă $a_{1976} = 40$ și dacă șirul satisface relația (1) atunci din relația (6) obținem că $a_{1976} = a_0$, $(1976 = 4 \cdot 394 + 0)$ și atunci șirul este:

$$a_0 = 40,\ a_1 = \frac{39}{41},\ a_2 = -\frac{1}{40},\ a_3 = -\frac{41}{39},$$

$$a_4 = a_0 = 40,\ \ldots,\ a_{1976} = 40,\ \ldots$$

Observație. Faptul că șirul dat de relația de recurență (1) nu este convergent rezultă și din relația de recurență care-l definește.

Într-adevăr, să presupunem că un șir definit de relația de recurență (1) ar fi convergent adică există $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Trecînd la limită în (1) obținem $a^2 = -1$; ceea ce contrazice faptul că $a \in \mathbf{R}$.

3.5*. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *astfel încît* $a_0 = 1$ *și*

$$a_n \leqslant a_{n+1},\ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Cu ajutorul lui se construiește șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *unde*

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Să se demonstreze că:
a°). *Avem:*

$$b_n \in [0, 2),\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). $(\forall)c \in [0, 2)$, $(\exists)$ *un şir* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu proprietatea că* $a_0 = 1$ *şi* $a_n < a_{n+1}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *astfel încît* $b_n > c$ *pentru o infinitate de indici* $n \in \mathbf{N}^*$.

(Olimpiada Internaţională de Matematică, 1970)

Soluţie. a°). Din ipoteză deducem că:

$$a_{k+1} - a_k \geqslant 0,\ a_k\sqrt{a_k} > 0,\ (\forall)k \in \mathbf{N}$$

şi atunci:

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k \cdot \sqrt{a_k}} = \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geqslant 0 \qquad (1)$$

de unde obţinem:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geqslant 0,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$u_k = \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \frac{2(a_k - a_{k-1})}{2a_k \cdot \sqrt{a_k}} = \frac{2(a_k - a_{k-1})}{a_k(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_k})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(a_k - a_{k-1})}{a_k(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})} = \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})}{a_k(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{a_k} = \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k} \cdot \sqrt{a_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k} \cdot \sqrt{a_{k-1}}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right),$$

de unde obţinem:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 1.$$

Prin urmare:

$$b_n \in [0,\ 2),\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

b°). Vom considera:

$$a_0 = 1,\ a_n = a_0 + (n-1)r,\ n \in \mathbf{N}^*,\ r > 0$$

și vom arăta că acest șir are proprietatea din enunț.

Într-adevăr, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$u_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k\sqrt{a_k}} = \frac{r}{a_k\sqrt{a_k}} > 0$$

și deci $b_n > 0,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Mai departe avem:

$$u_k = \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{2a_k\sqrt{a_k}} = \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{a_k(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_k})} > \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{a_k(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})} \geqslant$$

$$\geqslant 2\frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}}\cdot\sqrt{a_k}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} - \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right)$$

de unde obținem:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} u_k > 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} - \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$

aceasta deoarece $a_1 = a_0 + (1-1)r = a_0 = 1$.

Deci:

$$b_n > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right),\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $c = 0$, atunci inegalitatea precedentă ne verifică cele afirmate în enunț.

Fie $c \in (0,\ 2) \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{2} < 1$; atunci din faptul că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit superior rezultă că $(\exists)n_c \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru $(\forall)n > n_c$ să avem:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} > \frac{c}{2}$$

și deci pentru $(\forall) n \geq n_0$ avem:

$$b_n > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) > 2 \cdot \frac{c}{2} > c$$

adică $b_n > c$ pentru o infinitate de indici $n \in \mathbf{N}$.

3.6*. *Dacă pentru orice* $n \in \mathbf{N}^*$ *notăm* p_n *al* n*-lea număr prim și:*

$$x_n = \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n},$$

obținem șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. *Să se demonstreze că:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1$$

știind[1] *că:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1.$$

Soluție. Este evident că $p_1 = 2$ și să notăm:

$$y_n = \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln (n+1)};$$

atunci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln p_n}{\ln (n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln p_n - \ln (n \ln n) + \ln (n \ln n)}{\ln (n+1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln (n+1)} + \lim_{n \to \infty} \frac{\ln (\ln n)}{\ln (n+1)} + \lim_{n \to \infty} \frac{\ln \frac{p_n}{n \ln n}}{\ln (n+1)} = 1.$$

Deci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = 1. \qquad (1)$$

Vom arăta că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = 1$$

de unde dacă ținem seama de (1) rezultă enunțul.

---

[1] Cf. Sierpinski, Waclaw, *Ce știm și ce nu știm despre numere prime*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1967.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p_2-p_1}{\ln 2}+\frac{p_3-p_2}{\ln 3}+\ldots+\frac{p_{n+1}-p_n}{\ln(n+1)}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-p_1+\frac{p_{n+1}}{\ln(n+1)}+\sum_{k=3}^{n}\frac{p_k\cdot\ln\frac{k+1}{k}}{\ln(k+1)\ln k}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\cdot\frac{n+1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{p_k\cdot\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln k}}{n}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}1+\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+2)\ln(n+1)}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}=1+1\cdot1\cdot0=1.$$

La (*) am aplicat teorema CESARO-STOLZ.

3.7. *Fie* $k\in\mathbf{N}^*-\{1\}$ *și șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență:*

$$x_n=\frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right),\ x_0=b>0,\ a\in\mathbf{R}_+^*$$

oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$. *Să se demonstreze că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent și să se calculeze* $\lim_{n\to\infty}x_n$.

(D.M. Bătinețu și I.M. Stancu-Minasian, G.M.A., nr. 12/1973)

Soluție. Din modul cum a fost definit șirul, rezultă că $x_n>0$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$. Observăm că:

$$x_n-\sqrt[k]{a}=\frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right)-\sqrt[k]{a}=$$

$$=\frac{(k-1)x_{n-1}^{k}+a-kx_{n-1}^{k-1}\sqrt[k]{a}}{kx_{n-1}^{k-1}}. \qquad (1)$$

Pentru simplitate vom nota $\sqrt[k]{a} = \alpha$ și $x_{n-1} = \beta$ și atunci:

$$(k-1)x_{n-1}^k + a - k\,x_{n-1}^{k-1}\sqrt[k]{a} = (k-1)\beta^k + \alpha^k - k\alpha\beta^{k-1} =$$

$$= \alpha^k - k\alpha\beta^{k-1} + k\beta^k - \beta^k = \alpha^k - \beta^k + k\beta^{k-1}(\alpha - \beta) =$$

$$= (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\cdot\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1} -$$

$$- k\beta^{k-1}) = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{k-2} -$$

$$- (k-1)\beta^{k-1}) = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) + (\alpha^{k-2}\beta - \beta^{k-1}) +$$

$$+ (\alpha^{k-3}\beta^2 - \beta^{k-1}) + \ldots + (\alpha\beta^{k-2} - \beta^{k-1})) = (\alpha - \beta)^2((\alpha^{k-2} +$$

$$+ \alpha^{k-3}\beta + \ldots + \alpha\beta^{k-3} + \beta^{k-2}) + \beta(\alpha^{k-3} + \alpha^{k-4}\beta + \ldots + \alpha\beta^{k-4} +$$

$$+ \beta^{k-3}) + \ldots + \beta^{k-2}) \geqslant 0.$$

Pe baza ultimei inegalități, din relația (1) obținem că:

$$x_n - \sqrt[k]{a} \geqslant 0, \ (\forall)n \in \mathbf{N},$$

deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit inferior de $\sqrt[k]{a}$.

Avem:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{k}\left(k - 1 + \frac{a}{x_{n-1}^k}\right)$$

și deoarece:

$$a \leqslant x_n^k, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

rezultă că:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \leqslant 1 \Leftrightarrow x_n \leqslant x_{n-1}, \ (\forall)n \in \mathbf{N},$$

cu alte cuvinte am demonstrat că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este descrescător.

Fiind monoton și mărginit rezultă că este convergent adică există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$.

Trecînd la limită în relația de recurență a șirului obținem:

$$x = \frac{(k-1)x}{k} + \frac{a}{k\,x^{k-1}}$$

de unde $x = \sqrt[k]{a}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

3.8*. *Fiind dat şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de numere reale pozitive şi* $q \in (0, 1)$.

Să se determine şirul de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$ *astfel încît pentru* $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, n *fixat să avem:*

a°). $a_k < b_k$, $(\forall)k \in \{1, 2, ..., n\}$,

b°). $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$, $(\forall)k \in \{1, 2, ..., n-1\}$

c°). $\sum_{k=1}^{n} b_k < \frac{1+q}{1-q} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(Olimpiada Internaţională de Matematică, 1974)

Soluţie. Dacă vom considera pentru $n \in \mathbf{N}^*$ (n fixat)

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + ... + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + ... + a_n q^{n-k},\ k \in \{1, 2, ..., n\}$$

atunci este evident că:

$$a_k < b_k,\ (\forall)k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Dacă; $1 \leqslant k \leqslant n-1$ atunci:

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + ... + a_n q^{n-k-1}(q^2 - 1) < 0$$

şi, analog, rezultă că:

$$q\, b_{n+1} - b_k < 0,$$

de unde rezultă că se verifică condiţia b°).

c°). De asemenea, avem:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + ... + a_n q^{n-1} + a_1 q + a_2 + a_3 q + ...$$

$$+ ... + a_n q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + ... + a_n <$$

$$< (a_1 + a_2 + ... + a_n)(1 + 2q + 2q^2 + ... + 2q^{n-1}) <$$

$$\leqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot \frac{1+q}{1-q}.$$

Cu aceasta problema este rezolvată.

3.9. *Se dă șirul definit astfel:*

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n^4}{5x_n} + \frac{1}{5}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Să se demonstreze că $\frac{1}{5} < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 2$.

(Olimpiada Matematică, U.R.S.S., 1976

Soluția I. Avem:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3}{5} + \frac{1}{5x_n} = \frac{x_n^3}{5} + \frac{1}{15x_n} + \frac{1}{15x_n} + \frac{1}{15x_n} \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{x_n^3}{5 \cdot 15x_n \cdot 15x_n \cdot 15x_n}} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{15^4}} =$$

$$= \frac{4}{15} \cdot \sqrt[4]{3} > \frac{1}{3},\quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

unde am folosit inegalitatea mediilor.

Pentru a demonstra că:

$$x_n < 2,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

vom arăta că:

$$x_n > x_{n+1},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr, are loc șirul de echivalențe:

$$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow x_n > \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} \Leftrightarrow x_n^4 - 5x_n^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 \in \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2},\ \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)$$

și, deoarece $x_n > 0$, rezultă că

$$x_n > x_{n+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_n \in \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}},\ \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}}\right).$$

Deoarece $[1, 2] \subset \left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{21}}}{2}, \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}}}{2}\right)$ rezultă că pentru orice $x_n \in [1, 2]$ avem:

$$x_{n+1} < x_n < x_1 = 2$$

Dacă $x_n \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ atunci:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} < \frac{2}{5x_n} < \frac{2}{5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{6}{5} < 2.$$

Cazul $x_n > 2$ nu este posibil deoarece $x_1 = 2$.

Prin urmare, rezultă că:

$$x_n < 2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și deci enunțul este demonstrat.

Soluția a II-a. Mai întîi observăm că toți termenii șirului sînt pozitivi (verificare prin inducție completă).

1°). Arătăm că $x_{n+1} > \frac{1}{5}$ pentru orice $n \geq 1$.

Într-adevăr:

$$x_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} - \frac{1}{5} = \frac{x_n^4 - x_n + 1}{5x_n} =$$

$$= \frac{\left(x_n^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_n^2 - x_n + \frac{3}{4}}{5x_n} > 0$$

deoarece trinomul $x_n^2 - x_n + \frac{3}{4}$ ia numai valori pozitive pentru orice $x_n \in \mathbf{R}$, aceasta deoarece el are discriminantul $\Delta = 1 - 3 = -2 < 0$.

2°). Inegalitatea: $x_{n+1} < 2$ pentru orice $n \geq 1$ o demonstrăm prin inducție completă.

Pentru $n = 1$ avem:

$$x_2 = \frac{x_1 + 1}{5x_1} = \frac{17}{10} < 2.$$

Presupunem $x_n < 2$ și arătăm că $x_{n+1} < 2$ pentru orice număr natural $n > 2$.

Într-adevăr, avem:

$$x_{n+1} - 2 = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} - 2 = \frac{x_n^4 - 10x_n + 1}{5x_n}.$$

Ținînd seama că $x_n \in \left(\frac{1}{5}, 2\right)$, considerăm funcția $f: \left(\frac{1}{5}, 2\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 10x + 1$ pe care o scriem sub forma:

$$f(x) = x\left(x^3 + \frac{1}{x} - 10\right).$$

a°). Dacă $x \in \left(\frac{1}{5}, 1\right]$, atunci $\frac{1}{x} \in [1, 5)$ și cum $x^3 \leq 1$ rezultă că $x^3 + \frac{1}{x} < 6$, deci $f(x) < 0$.

b°). Dacă $x \in [1, 2)$ atunci $\frac{1}{x} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ și cum $x^3 < 8$ rezultă că $x^3 + \frac{1}{x} < 9$, deci $f(x) < 0$.

În concluzie, oricare ar fi $x \in \left(\frac{1}{5}, 2\right)$ avem $f(x) < 0$ deci:

$$x_{n+1} - 2 = \frac{f(x_n)}{5x_n} < 0,$$

adică tocmai ceea ce doream să arătăm.

3.10*. ***Fie:***

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*},\ (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*},\ (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*},\ a_n,\ b_n,\ c_n \in \mathbf{R}_+^*$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ ***cu proprietatea că*** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} = 0$ ***și există:***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{c_i}}{b_n} = a \in \mathbf{R}.$$

Dacă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ *notăm* $[x]_*$ *partea întreagă a lui* x *să se calculeze :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_*}{b_n}.$$

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. Din definiţia părţii întregi rezultă:

$$a_i^{c_i} x - 1 < [a_i^{c_i} x]_* \leqslant a_i^{c_i} x, \ (\forall) i \in \mathbf{N}^*.$$

de unde obţinem:

$$x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i} - n < \sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_* \leqslant x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i}.$$

Deoarece $b_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ din inegalităţile precedente rezultă:

$$\frac{x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i} - n}{b_n} < \frac{\sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_*}{b_n} \leqslant \frac{x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i}}{b_n}$$

de unde prin trecere la limită, obţinem:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i}}{b_n} - \lim_{n \to \infty} \frac{n}{b_n} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_*}{b_n} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{x \sum_{i=1}^{n} a_i^{c_i}}{b_n} \Leftrightarrow ax - 0 \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_*}{b_n} \leqslant$$

$$\leqslant ax \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} [a_i^{c_i} x]_*}{b_n} = a x.$$

3.11*. *Se consideră şirul de matrici pătratice* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *astfel încît :*

$$A_n = \begin{Vmatrix} a_n & c_n \\ c_n & b_n \end{Vmatrix}, \ a_n, \ b_n, \ \det A_n \in \mathbf{R}_+^*, \ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det A_n} = 0$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det (A_n + A_{n+k})} = 0, \ (\forall)\, k \in \mathbf{N}.$$

(Maria Giurgiu)

Soluție. În problema 15667 din Gazeta Matematică, nr. 2/1976 profesorul DUMITRU BĂTINEȚU demonstrează că:

$$(\forall) m, p \in \mathbf{N},\ a_m, a_p, b_m, b_p, \det A_m, \det A_p \in \mathbf{R}_+^*$$

atunci, avem:

$$0 < \frac{8}{\det (A_p + A_m)} < \frac{1}{\det A_p} + \frac{1}{\det A_m}.$$

Dacă în ultima inegalitate facem $p = n$ și $m = n + k$ obținem:

$$0 < \frac{8}{\det (A_n + A_{n+k})} < \frac{1}{\det A_n} + \frac{1}{\det A_{n+k}}$$

de unde prin trecere la limită obținem:

$$0 \leqslant 8 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det (A_n + A_{n+k})} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det A_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det A_{n+k}} = 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\det (A_n + A_{n+k})} = 0.$$

3.12. *Se dă șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *astfel încît:*

$$x_n = x + (n-1)r, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*;\ x, r \in \mathbf{R}_+^*$$

și se construiesc șirurile $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *prin relațiile de recurență:*

$$y_n = y_{n-1} + ax_n(bx_n - c), \quad z_n = z_{n+1} + dx_n(ex_n - f)$$

unde:

$$y_0, z_0 \in \mathbf{R}_+, \ bx_1 - c, \ ex_1 - f \in \mathbf{R}_+, \ c, a, d \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} y_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} z_i,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sigma_n}$.

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător şi nemărginit, din condiţiile în care a fost definit $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă că şi acesta este strict crescător şi nemărginit şi prin urmare putem aplica teorema CEASARO-STOLZ. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sigma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1} - s_n}{\sigma_{n+1} - \sigma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{z_{n+2} - z_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ax_{n+2}(bx_{n+2} - c)}{dx_{n+2}(ex_{n+2} - f)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ax_{n+2}^2\left(b - \dfrac{c}{x_{n+2}}\right)}{dx_{n+2}^2\left(e - \dfrac{f}{x_{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(b - \dfrac{c}{x_{n+2}}\right)}{d\left(e - \dfrac{f}{x_{n+2}}\right)} = \frac{ab}{de}.$$

3.13*. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *astfel încît* $(\exists)\alpha \in (0, 1]$ *cu proprietatea că* $f(x + y) \leqslant \alpha(f(x) + f(y))$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un şir de numere reale. Să se demonstreze că dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)} = 0$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)}{1 + f\left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)} = 0.$$

(D.M. Bătineţu)

Soluție. Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$ și $a \leqslant \alpha b$ atunci $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{\frac{1}{\alpha}+b}$.

Într-adevăr are loc șirul de echivalențe:

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{\frac{1}{\alpha}+b} \Leftrightarrow \frac{a}{1+a} \leqslant \frac{\alpha b}{1+\alpha b} \Leftrightarrow a + \alpha ab \leqslant \alpha b + \alpha ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \leqslant \alpha b.$$

Dacă pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ punem $a = f(x+y)$, $b = f(x) + f(y)$ atunci obținem:

$$\frac{f(x+y)}{1+f(x+y)} \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{\frac{1}{\alpha}+f(x)+f(y)} = \frac{f(x)}{\frac{1}{\alpha}+f(x)+f(y)} +$$

$$+ \frac{f(y)}{\frac{1}{\alpha}+f(x)+f(y)} \leqslant \frac{f(x)}{1+f(x)} + \frac{f(y)}{1+f(y)}. \qquad (1)$$

Am ținut seama mai sus că din $\alpha \in (0, 1]$ rezultă că $\frac{1}{\alpha} \in [1, +\infty)$ și prin urmare:

$$\frac{1}{\alpha} + f(x) + f(y) \geqslant 1 + f(x), \frac{1}{\alpha} + f(x) + f(y) \geqslant 1 + f(y).$$

Pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dat în enunț avem:

$$\frac{f(x_0+x_1)}{1+f(x_0+x_1)} \leqslant \frac{f(x_0)}{1+f(x_0)} + \frac{f(x_1)}{1+f(x_1)}. \qquad (2)$$

Presupunem că pentru $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant k$ avem:

$$\frac{f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)}{1+f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)} \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{1+f(x_i)} \qquad (3)$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$\frac{f\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right)}{1 + f\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right)} \leqslant \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)}. \tag{4}$$

Într-adevăr, avem:

$$0 \leqslant \frac{f\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right)}{1 + f\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right)} = \frac{f\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + x_{k+1}\right)}{1 + f\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + x_{k+1}\right)} \leqslant$$

$$\overset{(1)}{\leqslant} \frac{f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + f(x_{k+1})}{\frac{1}{\alpha} + f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + f(x_{k+1})} = \frac{f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)}{\frac{1}{\alpha} + f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + f(x_{k+1})} +$$

$$+ \frac{f(x_{k+1})}{\frac{1}{\alpha} + f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + f(x_{k+1})} \leqslant \frac{f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)}{1 + f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)} + \frac{(x_{k+1})}{1 + f(x_{k+1})} \overset{(3)}{\leqslant}$$

$$\overset{(3)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)} + \frac{f(x_{k+1})}{1 + f(x_{k+1})} = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)}.$$

Deci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$0 \leqslant \frac{f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)}{1 + f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)} \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{1 \oplus f(x_i)}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem enunțul.

3.14*. *Dacă* $x \in \mathbf{R}_+^*$ *și dacă* $a = \frac{1}{2}(1 + x)$ *reprezintă câtul a doi termeni consecutivi ai șirului lui* FIBONACCI *(adică* $a = \frac{1}{2}(1 + x) = \frac{u_{n+1}}{u_n}$*), atunci de o proprietate similară se bucură și numărul* $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$*, (adică numărul corespunzător* $b = \frac{1}{2}(1 + y)$ *este de asemenea câtul a doi termeni consecutivi ai șirului lui* FIBONACCI*). Mai precis:*

$$b = \frac{1}{2}(1 + y) = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}}.$$

Soluție. Să presupunem că x este un astfel de număr real, încît $\frac{1}{2}(1 + x) = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Din această egalitate rezultă fără dificultate că: $x = \frac{2u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Pe de altă parte, prin compunerea egalităților $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$ și $b = \frac{1}{2}(1 + y)$ se obține egalitatea $b = \frac{(x+1)^2 + 4}{4x}$. Înlocuind în această egalitate pe x în funcție de u_n și u_{n+1}, se obține egalitatea:

$$b = \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{2u_n u_{n+1} - u_n^2}. \tag{1}$$

Se cunoaște însă următoarea identitate:

$$u_{m+p} = u_{m-1}u_{p-1} + u_m u_p, \quad (\forall)\ m, p \in \mathbf{N}^* \tag{2}$$

care se poate demonstra cu ușurință prin inducție relativ la numărul natural p. Considerînd în formula (2) întîi $m = p = n + 1$, iar apoi $m = p = n + 2$, obținem formulele:

$$u_{2n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2, \tag{3}$$

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2. \tag{4}$$

Să considerăm acum numitorul care intervine în formula (1). Ținînd seamă de identitatea evidentă:

$$2u_n u_{n+1} = (u_n + u_{n+1})^2 - (u_n^2 + u_{n+1}^2),$$

obținem:

$$2u_nu_{n+1} - u_n^2 = (u_n + u_{n+1})^2 - (u_n^2 + u_{n+1}^2) = u_n^2. \qquad (5)$$

Dar, prin definiție:

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2},$$

iar, în baza formulei (3):

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+2}.$$

Astfel, egalitatea (5) se poate transcrie astfel:

$$2u_nu_{n+1} - u_n^2 = u_{n+2}^2 - u_n^2 = u_{2n+2}.$$

Vom adăuga și vom scădea în membrul al doilea al acestei egalități termenul u_{n+1}^2 și obținem:

$$2u_nu_{n+1} - u_n^2 = (u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2) - (u_{n+1}^2 + u_n^2) = u_{2n+2}.$$

Ținînd seamă de formulele (3) și (4), rezultă:

$$2u_nu_{n+1} - u_n^2 = (u_{2n+1} - u_{2n+2}) - u_{2n+2}$$

Dar:

$$u_{2n+1} - u_{2n+2} = u_{2n+3}$$

și deci:

$$2u_nu_{n+1} - u_n^2 = u_{2n+3} - u_{2n+2} = u_{2n+1}.$$

Ținînd seamă de această egalitate precum și de formula (3), egalitatea (1) devine $b = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$, ceea ce trebuia demonstrat.

3.15*. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir de numere reale, strict crescător și nemărginit cu* $a_1 \geqslant 1$. *Să se demonstreze că există un singur șir* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de numere reale astfel încît:*

$$x_n(1 + \ln x_n) = a_n \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru șirul de mai sus să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln a_n}{a_n} = 1.$$

(Maria Giurgiu)

Soluție. Dacă un $x \in \mathbf{R}$ este soluție a ecuației:

$$x(1 + \ln x) = a_n$$

atunci $x \geqslant 1$. Într-adevăr, presupunînd contrariul, adică $x \in (0, 1)$ atunci $\ln x < 0$ și sînt de analizat două cazuri: $1 + \ln x < 0$. Deoarece $x = \frac{a_n}{1 + \ln x}$ ar rezulta că $x < 0$ ceea ce contrazice $x \in (0, 1)$.

Fie, $0 < 1 + \ln x < 1$. În acest caz, $x = \frac{a_n}{1 + \ln x} > a_n \geqslant 1$, ceea ce din nou contrazice $x \in (0, 1)$.

Funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x(1 + \ln x)$ este strict crescătoare.

Într-adevăr, să presupunem că n-ar fi strict crescătoare: atunci există $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, $x_1 < x_2$ astfel încît $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

ceea ce este echivalent cu:

$$x_1 + x_1 \ln x_1 \geqslant x_2 + x_2 \ln x_2,$$

adică echivalent cu:

$$x_1 - x_2 \geqslant x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 > x_2 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = x_2 \ln \frac{x_2}{x_1},$$

deci $x_1 > x_2$ ceea ce este o contradicție.

Rezultă că f este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$. Fiind strict crescătoare, rezultă că f este o injecție și atunci graficul lui f taie dreapta $y = a_n$ într-un singur punct $x_n \in \mathbf{R}^*$.

Prin urmare ecuația $f(x) = a_n$ admite o soluție unică $x_n \in \mathbf{R}^*$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

În concluzie, există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de numere reale cu proprietatea că:

$$x_n(1 + \ln x_n) = a_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$\frac{x_n \ln a_n}{a_n} = \frac{x_n}{x_n(1 + \ln x_n)} : \ln a_n = \frac{1}{\frac{1}{\ln a_n} + \frac{\ln x_n}{\ln a_n}}$$

și dacă ținem seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln a_n} = 0$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln a_n}{a_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln a_n} = 1.$$

Din faptul că:

$$x_n(1 + \ln x_n) = a_n,$$

prin logaritmare obținem:

$$\ln x_n + \ln(1 + \ln x_n) = \ln a_n$$

de unde, avem:

$$\frac{\ln x_n}{\ln a_n} = 1 - \frac{\ln(1 + \ln x_n)}{\ln a_n} \geqslant 1 - \frac{\ln(1 + \ln a_n)}{\ln a_n}$$

iar de aici, dacă trecem la limită și ținem cont că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \ln a_n)}{\ln a_n} = 0,$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln a_n} \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \ln a_n)}{\ln a_n} = 1 - 0 = 1.$$

Dar: $\frac{\ln x_n}{\ln a_n} < 1$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln a_n} \leqslant 1$ și deci, ținînd seama de inegalitatea precedentă, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln a_n} = 1$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln x_n}{a_n} = 1.$$

3.16*. *Se consideră funcțiile* $f_n : D_n \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ *definite inductiv prin formulele:*

$$D_1 = \mathbf{R} \setminus \{-1\},\ f_1(x) = \frac{x}{x+1},\ D_{n+1} = \{x \in D_n \mid f_n(x) \in D_n\}$$

și:

$$f_{n+1} = f_1 \circ f_n.$$

a°). *Să se arate că* $\mathbf{R}_+ \subset D_n$ *și să se calculeze restricția lui* f_n *la* $\mathbf{R}_+$ *pentru* $n \in \mathbf{N}^*$.

b°). *Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

c°). *Să se arate că:*

$$D_n = \mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{-\frac{1}{i}\right\}\right),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

(Admitere, 1976, Facultatea de matematică, București)

Soluție. a°). Se constată cu ușurință că f_1 este strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$ și strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$.

Deoarece $f_1(0) = 0$ rezultă că $f_1([0, +\infty)) \subset [0, \infty)$ adică $[0, +\infty) \subset D_2$.

Să presupunem că $[0, +\infty) \subset \bigcap_{i=1}^{n} D_i$ și că:

$$f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_{n-1}(0) = 0.$$

Rezultă atunci că $f_{n-1}([0, \infty)) \subset D_1$ și că are sens pentru orice $f_{n-1}(x) \in f_{n-1}([0, +\infty))$ să calculăm $f_1(f_{n-1}(x))$.

În plus, este evident că $f_{n-1}(0) = 0$, deci $f_1(f_{n-1}(0)) = 0$ și cum f_1 este crescătoare, rezultă că:

$$f_1(f_{n-1}([0, +\infty)) = f_n([0, +\infty)) \subset [0, +\infty).$$

Deci $[0, +\infty) \subset D_{n+1}$. Am arătat prin inducție că $[0, +\infty) \subset D_n$ și că $f_n(0) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Fie acum $x \in [0, +\infty)$ arbitrar. Avem:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + 1} = \frac{x}{2x + 1}.$$

Să presupunem că $f_n(x) = \frac{x}{nx + 1}$, atunci:

$$f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)}{f_n(x) + 1} = \frac{x}{(n + 1)x + 1}.$$

Am demonstrat prin inducție că pentru orice $x \in [0, +\infty)$ avem:

$$f_n(x) = \frac{x}{nx + 1}.$$

b°). Avem:

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{nx+1} = \frac{1}{n} \text{ și } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{nx+1} = 0.$$

Este evident atunci că:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0.$$

c°). Evident că $D_1 = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Vom presupune că:

$$D_n = \mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{-\frac{1}{i}\right\}\right),$$

și atunci:

$$D_{n+1} = D_n \setminus \left\{x \,\middle|\, \frac{x}{nx+1} = -1\right\}.$$

Dar $\frac{x}{nx+1} = -1 \Leftrightarrow x = -nx - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{n+1}$.

Prin urmare, avem:

$$D_{n+1} = \mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \left\{-\frac{1}{i}\right\}\right)$$

și demonstrația prin inducție a celor enunțate este încheiată.

3.17. *Fie* $a, b, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *unde* a, b *sînt bazele a două sisteme de numerație. Notăm* A_n *respectiv* B_n *numărul*

$$\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$$

scris în baza a *respectiv* b *unde,* $(\forall) i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, x_i *sînt cifre în ambele baze de numerație și unde* $x_n, x_{n-1} \in \mathbf{R}_+^*$. *Fie* A_{n-1} *respectiv* B_{n-1} *numerele care se obțin din* A_n *respectiv* B_n *prin suprimarea cifrei* x_n. *În acest fel obținem șirurile* $(u_n)_{n\geq 2}$ *și* $(v_n)_{n\geq 2}$ *cu:*

$$u_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}, \quad v_n = \frac{B_n}{B_{n-1}}, \quad (\forall)\ n \geq 2.$$

Să se demonstreze că:

$$u_n < v_n \Leftrightarrow a > b.$$

(Olimpiada internațională de matematică, 1970, D.M. Bătinețu)

Soluție. Avem:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} x_k a^k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k b^k, \quad A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k,$$

$$B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Prin urmare:

$A_{n-1} = A_n - x_n a^n$, $B_{n-1} = B_n - x_n b^n$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$.

Fie $a > b$. În această ipoteză:

$$a^k > b^k, \ \frac{1}{a^k} < \frac{1}{b^k}, \ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $x_n, x_{n-1} \in \mathbf{R}_+^*$ și $x_k \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ k \leqslant n-2$, din inegalitatea precedentă obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right) < 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{n-k}}{a^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{n-k}}{b^k}$$

de unde rezultă:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}a^{n-k}}{a^n} < \frac{\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}b^{n-k}}{b^n} \Leftrightarrow \frac{A_n}{a^n} < \frac{B_n}{b^n} \Leftrightarrow \frac{a^n}{A_n} > \frac{b^n}{B_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{x_n a^n}{A_n} < 1 - \frac{x_n b^n}{B_n} \Leftrightarrow \frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} \Leftrightarrow u_n < v_n.$$

Reciproc, fie $u_n < v_n$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Atunci:

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}, \ (\forall)\ n \geqslant 2$$

și deci, exprimînd fiecare număr în baza de numerație respectivă și procedînd pe calea inversă celei de mai sus, obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right) < 0.$$

Deoarece, $x_n, x_{n-1} \in \mathbf{R}_+^*$, $x_{n-k} \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ 2 \leqslant k \leqslant n$ rezultă că inegalitatea precedentă este adevărată numai dacă $a > b$.

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

3.18*. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un şir de numere reale nenule cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Atunci $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $(\exists)$ *un şir* $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, *şir care depinde de* x *astfel încît :*

$$x = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Soluţie. Să presupunem $x > 0$, $x_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ atunci înlocuind un termen x_n cu $y_n = \frac{x_n}{x}$ putem presupune că $x = 1$. Evident găsim un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)n \geq n_0$ există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$a_1a_2 \ldots a_n\, x_1x_2 \ldots x_n < 1 \leq a_1a_2 \ldots (a_n + 1)x_1x_2 \ldots x_n.$$

Deci:

$$1 - a_1a_2 \ldots a_n\, x_1x_2 \ldots x_n \leq a_1a_2 \ldots (a_n + 1)x_1x_2 \ldots x_n -$$

$$- a_1a_2 \ldots a_nx_1x_2 \ldots x_n = a_1a_2 \ldots a_{n-1}x_1x_2 \ldots x_n =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right) x_n < x_n.$$

Prin urmare:

$$0 < 1 - \prod_{i=1}^{n} a_i x_i < x_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*, \tag{1}$$

de unde, prin trecere la limită, obţinem că:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i x_i = 1.$$

Este evident că dacă $x = 0$ atunci $a_n = 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Fie acum $x \in \mathbf{R}^*$ arbitrar şi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ îndeplinind condiţiile din enunţ. Atunci după cele arătate mai înainte există un şir $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n \in \mathbf{Z}_+$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$|x| = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} b_n |x_n|. \tag{2}$$

Dacă luăm: $a_1 = b_1 \operatorname{sign} x_1 \cdot \operatorname{sign} x$, $a_n = b_n \operatorname{sign} x_n$, $(\forall)\, n \geqslant 2$ atunci $a_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, iar relația (2) ne demonstrează că:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i x_i = x.$$

3.19*. *Fie* $\{a_n \mid a_n \in \mathbf{R}_+^*\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, $\{b_n \mid b_n \in \mathbf{R}^*\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ *și* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *și* $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $(\exists)c_n \in \mathbf{R}$ *astfel încît:*

$$a_n x + c_n < f(a_n x) \leqslant a_n x.$$

Dacă se dă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{b_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{b_n} = a \in \mathbf{R}$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i x)}{b_n}$.

(D.M. Bătinețu, Revista „Năzuințe" a Liceului de matematică-fizică, Matei Basarab, București)

Soluție. Deoarece:

$$a_i x + c_i < f(a_i x) \leqslant a_i x, \quad (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

prin adunare rezultă:

$$x \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} c_i < \sum_{i=1}^{n} f(a_i x) \leqslant x \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Prin împărțire cu $b_n > 0$ obținem:

$$\frac{x}{b_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{b_n} < \frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i x)}{b_n} \leqslant x \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{b_n}$$

de unde prin trecere la limită rezultă:

$$ax + 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i x)}{b_n} \leqslant ax$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i x)}{b_n} = ax.$$

Un exemplu de astfel de funcție este $[\cdot]_* : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, iar:

$$a_n = n^2,\ b_n = n^3,\ c_n = -1,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]_* + [2^2 x]_* + \ldots + [n^2 x]_*}{n^3} = \frac{x}{3}.$$

3.20*. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\geq 2}$ *unde:*

$$a_n = \sqrt[n]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$$

și se cere să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(Traian Lalescu[1]*, G.M., 1901, problema 579)*

Soluția I. Dacă notăm $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geq 2$ avem:

$$x_{n+1} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right)^{\frac{n}{n+1}} \tag{1}$$

și:

$$a_n = \frac{n(\sqrt[n]{x_{n+1}} - 1)}{x_n}. \tag{2}$$

Se presupun cunoscute următoarele chestiuni:

i) Inegalitatea mediilor: dacă $a_k \geq 0$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$;

$$A_N(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N} a_k,$$

$$G_N(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \sqrt[N]{a_1 a_2 \ldots a_N},$$

atunci:

$$G_N(a_1, a_2, \ldots, a_N) \leq A_N(a_1, a_2, \ldots, a_N), \tag{3}$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sînt egale între ele.

[1] Traian Lalescu (1882–1929) – matematician român

ii°). Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}. \tag{4}$$

Vom demonstra cîteva rezultate intermediare:

Propoziția 1. Pentru $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ avem:

$$1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n\sqrt{n}-2\sqrt{n}+2} < \sqrt[n]{n} < 1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}. \tag{5}$$

Observînd că avem:

$$G_n(1,1,\ldots,1,\sqrt{n},\sqrt{n}) = \sqrt[n]{n},$$

$$A_n(1,1,\ldots,1,\sqrt{n},\sqrt{n}) = 1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}$$

$$G_n\left(1,1,\ldots,1,\frac{\sqrt{n}}{n},\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

$$A_n\left(1,1,\ldots,1,\frac{\sqrt{n}}{n},\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \frac{1}{1+\dfrac{2(\sqrt{n}-1)}{n\sqrt{n}-2\sqrt{n}+2}},$$

inegalitatea (3) demonstrează (5).

Propoziția 2. Dacă $x_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geqslant 2$, atunci:

$$\frac{n+1}{ne} < \frac{1}{x_n} < \frac{n+2\sqrt{n}-2}{(n-1)e}. \tag{6}$$

Demonstrație. Înmulțind inegalitățile (4), pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ găsim:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^{n-1} < \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Dar:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=1}^{n} k^{k-1}}{\prod_{k=2}^{n-1} k^k} = \frac{n^n}{n!}$$

și:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\frac{\prod_{k=2}^{n}k^k}{\prod_{k=1}^{n-1}k^{k+1}}=n\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

Prin urmare:

$$\frac{n^n}{n!}<e^{n-1}<n\cdot\frac{n^n}{n!}$$

adică:

$$x_n<e^{\frac{n-1}{n}}<\sqrt[n]{n}\cdot x_n$$

sau:

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e}<\frac{1}{x_n}<\frac{1}{e}\sqrt[n]{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}.$$

Din inegalitățile (4) deducem:

$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1}. \tag{8}$$

Utilizînd inegalitățile (5) obținem:

$$\sqrt[n]{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}<\frac{n+2\sqrt{n}-2}{n-1},$$

ceea ce ne permite să stabilim inegalitățile:

$$\frac{n+1}{ne}<\frac{1}{x_n}<\frac{n+2\sqrt{n}-2}{(n-1)e}.$$

Propoziția 3. Pentru $n\geqslant 2$ au loc inegalitățile:

$$\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)<n\left(x_{n+1}^{\frac{1}{n}}-1\right)<1. \tag{9}$$

Demonstrație. Din (7) și (8) rezultă:

$$n\left(x_{n+1}^{\frac{1}{n}}-1\right)<n\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)<1.$$

Dacă vom considera:

$$N=n(n+1),\ a_1=a_2=\ldots=a_{N-n}=1,\ a_{N-n+1}=a_{N-n+2}=\ldots=a_N=\sqrt{n}+1,$$

avem:

$$G_N(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \sqrt[N]{n+1},$$

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \frac{n^2+n-2+2\sqrt{n+1}}{n(n+1)}.$$

Ținînd cont de (3) avem:

$$\sqrt[n(n+1)]{n+1} < \frac{n^2+n-2+2\sqrt{n+1}}{n(n+1)},$$

iar din (7) și (8) deducem:

$$n\left(\frac{1}{x_{n+1}^{n}}-1\right) > n\left(\frac{e^{\frac{1}{n+1}}}{\sqrt[n+1]{n+1}}-1\right) >$$

$$> n\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+n-2+2\sqrt{n+1}}-1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n^2-2n\sqrt{n+1}+2n}{n^2+n-2+2\sqrt{n+1}} >$$

$$> \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) > \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right),$$

ceea ce completează demonstrația inegalităților (9).

Propoziția 4. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 2}$ este șirul definit prin egalitatea (2), atunci:

$$\left|a_n-\frac{1}{e}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}. \tag{10}$$

Demonstrație. Din (1), (6) și (9) deducem:

$$a_n = \frac{n\left(\frac{1}{x_{n+1}^{n}}-1\right)}{x_n} < \frac{n+2\sqrt{n}-2}{(n-1)e}$$

și:

$$a_n > \frac{1}{e}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Prin urmare:

$$-\frac{2}{e\sqrt{n}} < a_n-\frac{1}{e} < \frac{2}{e\sqrt{n}}$$

adică:

$$\left|a_n-\frac{1}{e}\right| < \frac{2}{e\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

În concluzie, inegalitatea (10) ne arată că șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

Soluția a II-a. Vom demonstra și aici unele propoziții ajutătoare:

Propoziția 5. Pentru $n > 3$ sînt verificate inegalitățile:

$$e^{1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} < x_n < e^{1-\frac{1}{n}} \text{ unde } x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}. \qquad (11)$$

Demonstrație (prin inducție completă). Să arătăm că pentru $n > 3$ avem:

$$x_n > e^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}. \qquad (12)$$

Într-adevăr, deoarece:

$$e < \sqrt[3]{\frac{32}{3}}, \text{ și } x_4 = \sqrt[4]{\frac{32}{3}},$$

rezultă că (12) are loc pentru $n = 4$. Presupunînd (12) verificată, din (1) rezultă:

$$x_{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot e^{\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)},$$

iar din (4) deducem $x_{n+1} > e^{1-f(n)}$ unde:

$$f(n) = \frac{1+(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)^2}.$$

Se verifică imediat că $n \geq 4 \Rightarrow f(n) < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Prin urmare, $x_{n+1} > e^{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}$, ceea ce demonstrează inegalitatea (12).

Presupunînd $x_n < e^{1-\frac{1}{n}}$, $n \geq 4$, din (1) și (4) avem:

$$x_{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot e^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}} < e^{1-\frac{1}{n+1}},$$

ceea ce completează demonstrația.

Propoziția 6. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, inegalitatea:

$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon$$

este verificată pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$, unde:

$$n_\varepsilon = 1 + \left[8 + \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left| 8 - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right| \right]_* .$$

Demonstrație. Utilizînd (11) și (4), pentru $n \geqslant 16$ avem:

$$a_n = \frac{n(\sqrt[n]{x_{n+1}} - 1)}{x_n} < \frac{n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)}{e} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} <$$

$$< \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{[\sqrt{n}]_* - 1}\right) < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n} - 2}\right) < \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

De asemenea, avem:

$$n\left(x_n^{\frac{1}{n}} - 1\right) > n\left(e^{\frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}} - 1\right) > n\left(e^{\frac{1}{[n+2+\sqrt{n+1}]_*}} - 1\right) >$$

$$> \frac{n}{[n + 2 + \sqrt{n+1}]_*} \geqslant \frac{n}{n + 2 + \sqrt{n+1}} .$$

Prin urmare, avem:

$$a_n > \frac{1}{e} \frac{ne^n}{n + 2 + \sqrt{n+1}} > \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

În consecință, pentru $n \geqslant 16$ avem:

$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}} . \tag{13}$$

Deoarece $n_\varepsilon = 1 + \left[\max\left(16, \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \right]_* > \max\left(16, \frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ pentru $n \geqslant n_\varepsilon$ avem $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, ceea ce implică (vezi (13)):

$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon$$

pentru $n \geqslant n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1/e$.

Soluția a III-a. *(dată de* MARCEL ȚENA). Vom folosi următoarea propoziție:

(P) = *Dacă* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un șir de numere reale strict pozitive și dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=u>0$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=u$.

Dacă în (P) punem $u_n=\frac{(n+1)^n}{n!}$ atunci:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to e$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=e. \tag{14}$$

Dacă în (P) punem $u_n=\frac{n^n}{n!}$ atunci:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$$

și prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e. \tag{15}$$

Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{n}{n+1}}\overset{(14)}{=}e. \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=e\cdot e^{-1}\overset{(15)}{=}1 \tag{17}$$

Prin urmare:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}}\right)^{a_n\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} =$$

$$= e^{a\cdot e} \Leftrightarrow e = e^{ae} \Leftrightarrow a = e^{-1} \text{ unde } a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3.21. *Fie* $k \in \mathbf{N}^*$ *și* $\mathbf{Q}_k = \left\{r = \frac{m}{k} \mid m \in \mathbf{Z}\right\}$. *Oricărui număr real* $x \in \mathbf{R}$ *i se asociază un număr* $f(x) \in \mathbf{Q}_k$ *definit prin inegalitățile*

$$f(x) \leqslant x < f(x) + \frac{1}{k}.$$

a°). *Să se arate că asocierea* $x \to f(x)$ *definește o funcție* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Q}_k$.

b°). *Să se arate că:* $f(2x) - f(x) = f\left(x + \frac{1}{2k}\right)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

c°). *Notînd* $a_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x+2i}{2^{i+1}k}\right)$ *să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$.

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 1970)

Soluție. a°). A arăta că asocierea $x \to f(x)$ definește o funcție, revine la a stabili că numărul $f(x) = \frac{m}{k} \in \mathbf{Q}_k$; definit prin inegalitățile din enunț, este unic.

Să presupunem deci că mai există un $f(x) = \frac{m'}{k} \in \mathbf{Q}_k$ cu aceeași proprietate. Avem deci inegalitățile:

$$\frac{m}{k} \leqslant x < \frac{m+1}{k}, \quad \frac{m'}{k} \leqslant x < \frac{m'+1}{k}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$m \leqslant kx < m+1, \; m' \leqslant kx < m'+1$$

de unde obținem $m \quad m' \leqslant kx \quad m' \text{ și } m' - m \leqslant kx - m$
Dar $kx \quad m, kx \quad m' \geqslant 0$ și prin urmare $m - m' \leqslant 0$, $m' \quad m \leqslant 0$ de unde $m = m'$.

b°). Vom observa mai întîi că:

$$\left[f(x),\ f(x) + \frac{1}{k}\right) = \left[f(x),\ f(x) + \frac{1}{2k}\right) \cup$$

$$\cup \left[f(x) + \frac{1}{2k},\ f(x) + \frac{1}{k}\right), \quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece cele două mulțimi din membrul drept sînt disjuncte, rezultă că x aparține fie numai primeia din ele, fie numai celei de-a doua. Să ne situăm în prima ipoteză, adică $x \in \left[f(x),\ f(x) \quad \frac{1}{2k}\right)$; atunci:

$$f(x) \leqslant x < f(x) + \frac{1}{2k} < f(x) + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = f(x) + \frac{1}{2k},$$

de unde rezultă că:

$$f\left(x + \frac{1}{2k}\right) = f(x).$$

Pe de altă parte, avem inegalitățile:

$$2f(x) \leqslant 2x < 2f(x) + \frac{1}{k},\ f(2x) \leqslant 2x < f(2x) + \frac{1}{k}$$

ceea ce atrage după sine $f(2x) = 2f(x)$. Deci, în acest caz:

$$f(2x) - f(x) = 2f(x) - f(x) = f(x) = f\left(x + \frac{1}{2k}\right)$$

și egalitatea este demonstrată. În cealaltă situație se procedează analog.

c°). Ținînd seama de punctul b°), vom avea:

$$a_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x + 2i}{2^{i+1}k}\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x}{2^{i+1}k} + \frac{1}{2k}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(f\left(\frac{x}{2^i k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{i+1}k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x}{2^i k}\right) - \sum_{i=1}^{n+1} f\left(\frac{x}{2^i k}\right) = f\left(\frac{x}{k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1} \cdot k}\right).$$

Să arătăm acum că:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & \text{dacă } -\frac{1}{k} \leqslant x < 0 \\ 0, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Într-adevăr, în prima situație $-1 \leqslant kx < 0$ și pe de altă parte $f(x) = \frac{m}{k} \leqslant x < \frac{m+1}{k}$ adică $m < kx < m + 1$. Or, această inegalitate și cu $-1 \leqslant kx < m + 1$ nu sînt contradictorii atunci și numai atunci cînd $m = -1$ și deci $f(x) = -\frac{1}{k}$. Analog se demonstrează că $f(x) = 0$ dacă $0 \leqslant x < \frac{1}{k}$. În altă ordine de idei, dacă $x \geqslant 0$, atunci există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$0 \leqslant \frac{x}{2^{n_0+1} \cdot k} < \frac{1}{k},$$

iar dacă $x < 0$, există $n_1 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$-\frac{1}{k} \leqslant \frac{x}{2^{n_1+1} \cdot k} < 0.$$

De aici deducem imediat că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{1}{k}, & \text{dacă } x < 0. \\ f\left(\frac{x}{k}\right), & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3.22. *Să se demonstreze că nu există un șir* $(P_n)_{n\geqslant 1}$ *de polinoame* $P_n \in \mathbf{R}[X]$ *astfel încît:*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x^2) = x^3, \ (\forall) x \in [-1, 1]$$

Soluție. Să presupunem prin absurd că există un șir de polinoame $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $P_n \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x^2) = x^3, \ (\forall) x \in [-1, 1].$$

Fie deci $x_1 \in (0, 1]$; atunci:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x_1^2) = x_1^3 \neq 0. \tag{1}$$

Deoarece $x_1 \in (0, 1]$ rezultă $-x_1 = x_2 \in [-1, 0)$ și atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x_2^2) = x_2^3 = -x_1^3 \neq 0. \tag{2}$$

Dar:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x_2^2) = \lim_{n\to\infty} P_n(x_1^2) = x_1^3. \tag{3}$$

Din (1), (2), (3) avem $x_1^3 = -x_1^3 \Leftrightarrow x_1 = 0$, ceea ce contrazice $x_1 \in (0, 1]$.

Prin urmare, presupunerea că ar exista șirul de polinoame $(P_n)_{n\geq 1}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x^2) = x^3, \quad (\forall)x \in [-1, 1]$$

este absurdă și deci enunțul este demonstrat.

3.23*. *Numim* s-*vecinătatea a unui punct* $a \in \mathbf{R}$ *orice interval* $(\alpha, \beta]$ *cu proprietatea că* $a \in (\alpha, \beta]$. *Spunem că șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este* s-*convergent dacă și numai dacă* $(\exists)x \in \mathbf{R}$ *astfel încît* $(\forall)$ s-*vecinătatea lui* x *în afara ei se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului și folosim notația* $s * \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

a°). *Să se dea o condiție necesară și suficientă pentru* s-*convergența unui șir, analogă condiției:*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ (\forall)n \geq n_\varepsilon.$$

b°). *Să se examineze* s-*convergența șirurilor de termeni generali:*

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

(D.M. Bătinețu)

Soluție. a°). Condiția necesară și suficientă este:

$$(\forall)\varepsilon > 0, \ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}, \ n \geq n_\varepsilon$$

atunci, avem:

$$0 \leqslant x - x_n < \varepsilon. \qquad (1)$$

Pentru demonstrație observăm că au loc echivalențele:

$$0 \leqslant x - x_n < \varepsilon \Leftrightarrow -x \leqslant x_n < \varepsilon - x \Leftrightarrow x \geqslant x_n > x - \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x].$$

$s * \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow (1)$. Avem deci că, în afara oricărei s-vecinătăți $(x - \varepsilon, x]$ se află cel mult termenii x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k} și deci condiția (1) este verificată dacă luăm $n_\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} x_{n_i}$. $(1) \Rightarrow s * \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Este suficient să observăm că în orice s-vecinătate $(\alpha, \beta]$ a lui x este inclusă o s-vecinătate $(x - \varepsilon, x]$ (de exemplu, dacă luăm $\varepsilon = x - \alpha > 0$) și atunci aplicînd (1) pentru acest ε deducem că în afara s-vecinătății $(\alpha, \beta]$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

b°). Deoarece $0 \leqslant \frac{1}{n} - 0 < \varepsilon$, $(\forall) n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]_* + 1$ rezultă atunci, că $s * \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

Se constată cu ușurință că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ nu satisfac condiția (1) pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și deci nu sînt s-convergente.

3.24*. *Fie șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *unde:*

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă n } \textit{conține cifra 9} \\ \frac{1}{n}, & \textit{dacă n nu conține cifra 9} \end{cases}$$

și cu ajutorul lui formăm șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *unde* $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Să se demonstreze că șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent, și să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant 25$.

Soluție. Fixăm un $n \in \mathbf{N}^*$ și fie m cel mai mare număr natural care nu conține cifra 9 astfel încît $m \leqslant 10n$.

Rezultă atunci, că:

$$u_{10n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{18}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \ldots + \frac{1}{28}\right) + \ldots + \frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{9}{10} +$$

$$+ \frac{9}{20} + \ldots + \frac{9}{80} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10\left[\frac{m}{10}\right]_*} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} +$$

$$+ \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{m}{10}\right]_*}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{9}{10} u_n.$$

Această inegalitate poate fi îmbunătățită dacă facem majorarea începînd de la a treia paranteză din expresia termenului u_{10n}.

În acest sens, reluînd raționamentul de mai sus obținem:

$$u_{10n} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{18} - \frac{8}{10}\right) +$$

$$+ \frac{9}{10} + \frac{9}{20} + \ldots + \frac{9}{10\left[\frac{m}{10}\right]_*} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} +$$

$$+ \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{18} - \frac{8}{10}\right) + \frac{9}{10} u_n$$

și prin urmare, rezultă:

$$u_{10n} - \frac{9}{10} u_n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} +$$

$$+ \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{18} - \frac{8}{10}. \qquad (1)$$

Deoarece $u_{10n} > u_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ atunci rezultă că:

$$u_{10n} < u_{10n} + 9(u_{10n} - u_n) = 10u_{10n} - 9u_n = 10\left(u_{10n} - \frac{9}{10} u_n\right)$$

și deci ținînd seama de (1) obținem:

$$u_{10n} < 10\left(u_{10n} - \frac{9}{10}u_n\right) < 10\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{18} - \frac{8}{10}\right) < 25.$$

Deci, șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător și mărginit superior de 25 adică $u_n < 25$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Fiind monoton și mărginit este convergent și prin urmare, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant 25$.

3.25. *Să se demonstreze că există un singur șir de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu proprietatea că* $x_n(1 + \ln x_n) = n$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}^*$. *Pentru șirul de mai sus să se demonstreze că*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln n}{n} = 1.$$

(D.M. Bătinețu, Revista „Năzuința", a Liceului de matematică — fizică „Matei Basarab", București)

Soluție. Dacă un $x \in \mathbf{R}$ este soluție a ecuației $x(1 + \ln x) = n$ atunci $x \geqslant 1$. Într-adevăr, presupunînd contrariul, adică $0 < x < 1$ atunci $\ln x < 0$ și sînt de analizat două cazuri:

a°). Dacă $1 + \ln x < 0$, atunci $x = \frac{n}{1 + \ln x}$ și deci $x < 0$ adică în contradicție cu $x \in (0, 1)$.

b°). Dacă $0 < 1 + \ln x < 1$, atunci $x = \frac{n}{1 + \ln x} > n \geqslant 1$ deci iarăși contradicție cu $x \in (0, 1)$.

Funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = x(1 + \ln x)$ este strict crescătoare. Într-adevăr, să presupunem că n-ar fi strict crescătoare; atunci există $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ cu $x_1 < x_2$ astfel încît $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_1 \ln x_1 \geqslant x_2 + x_2 \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 > x_2(\ln x_2 - \ln x_1) > 0$ de unde ar rezulta $x_1 > x_2$ ceea ce este o contradicție.

Funcția f fiind strict crescătoare și $f(x) \geqslant 1$ pentru $x \in [1, +\infty)$ rezultă că f este injecție și atunci graficul funcției f taie dreapta $y = n$ într-un singur punct $x_n \in \mathbf{R}$.

Deci ecuația $f(x) = n$ admite o soluție unică $x_n \in \mathbf{R}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. În concluzie, există un singur șir

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de numere reale cu proprietatea că $x_n(1+\ln x_n)=n$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

Avem:

$$\frac{x_n\ln n}{n}=\frac{x_n}{x_n(1+\ln x_n)}\cdot\ln n=\frac{1}{\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln x_n}{\ln n}}.$$

Avînd în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln n}{n}=1$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{\ln n}=1.$$

Din egalitatea dată:

$$x_n(1+\ln x_n)=n,$$

prin logaritmare, obţinem:

$$\ln x_n+\ln(1+\ln x_n)=\ln n$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{\ln x_n}{\ln n}=1-\frac{\ln(1+\ln x_n)}{\ln n}. \tag{1}$$

Evident că $x_n\leqslant n$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$ şi atunci $\ln x_n\leqslant\ln n$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$ deci:

$$1\geqslant 1-\frac{\ln(1+\ln x_n)}{\ln n}\geqslant 1-\frac{\ln(1+\ln n)}{\ln n},\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

De aici, dacă ţinem seama că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\ln n)}{\ln n}=0$$

prin trecere la limită obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\ln x_n)}{\ln n}=0$$

şi atunci din (1) prin trecere la limită rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{\ln n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\ln x_n)}{\ln n}=1.$$

Cu aceasta am demonstrat că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln n}{n} = 1.$$

3.26*. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un șir cu* $a_n \geq 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$. *Să se găsească o condiție necesară și suficientă pe care să o verifice termenii șirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *astfel încît să avem* $a_n = x_n + y_n$ *cu* $x_n,\ y_n \geq 0$. $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ *unde șirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sînt monotone.*

(Laurențiu Panaitopol, Baraj, 1974)

Soluție. Fie propoziția:

$p_1 \equiv$ „$a_n = x_n + y_n$, $x_n,\ y_n \geq 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ unde $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sînt șiruri monotone.

Fie $x_+ = \max(x, 0)$ și $x_- = \min(x, 0)$ atunci este evident că $x_+ \geq 0$, $x_- \leq 0$ și că $x = x_+ + x_-$.

Fie propoziția:

$$p_2 \equiv \text{„}(\forall)n \in \mathbf{N}^* \text{ atunci } a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_- \geq 0\text{“}.$$

Vom demonstra că $p_1 \Leftrightarrow p_2$.

$p_2 \Rightarrow p_1$ Într-adevăr, dacă vom considera:

$$x_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_-$$

atunci $p_2 \Rightarrow x_n \geq 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și:

$$x_{n+1} - x_n = (a_{n+1} - a_n)_- \leq 0,$$

adică șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

Dacă notăm:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_+;$$

atunci este evident că $y_n \geq 0$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și că

$$y_{n+1} - y_n = (a_{n+1} - a_n)_+ \geq 0$$

deci șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este crescător. În plus:

$$x_n + y_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_- + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_+ =$$

$$= a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n \geq 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Conform propoziției p_2 avem:

$$x_n \geq 0, \ y_n \geq 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Totodată:

$$x_{n+1} - x_n = (a_{n+1} - a_n)_- \leq 0$$

și:

$$y_{n+1} - y_n = (a_{n+1} - a_n)_+ \geq 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce ne arată că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sînt monotone.

$p_1 \Rightarrow p_2$. Distingem patru cazuri:

a°). Șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt monoton crescătoare. Atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător deci:

$$(a_{i+1} - a_i)_- = 0, \ (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

și atunci:

$$a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_- = a_1 \geq 0.$$

b°). Șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt monoton descrescătoare. Atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător și deci:

$$(a_{i+1} - a_i)_- = a_{i+1} - a_i, \ (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

și prin urmare:

$$a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_- = a_n \geq 0.$$

c). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton crescător, iar șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton descrescător. Atunci:

$$x_{i+1} - x_i \leq 0, \ y_{i+1} - y_i \geq 0, \ (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

și deci:

$$(a_{i+1} - a_i)_- = ((x_{i+1} - x_i) + (y_{i+1} - y_i)) \geqslant$$
$$\geqslant (x_{i+1} - x_i)_- = x_{i+1} - x_i.$$

Dar $a_1 = x_1 + y_1 \geqslant x_1$ și atunci:

$$a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)_- \geqslant x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n \geqslant 0.$$

d°). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton descrescător, iar șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este monoton crescător. În acest caz se procedează analog cu cazul c).

Observație. Nu orice șir de numere reale satisface proprietatea din enunț. Într-adevăr, fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ cu $a_{2k} = 2$ și $a_{2k+1} = 1$.

Atunci:

$$a_1 + (a_2 - a_1)_- + (a_3 + a_2)_- + (a_4 - a_3) +$$
$$+ (a_5 - a_4)_- = -1 < 0.$$

3.27*. *Fie* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir arbitrar și* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir divergent. Dacă :*

a°). Șirul $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este strict monoton.*

b°). $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = a$, *finit sau infinit,*

atunci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ *și* $\lim\limits_{n\to\alpha} \dfrac{u_n}{v_n} = a$

(Teorema CESARO-STOLZ).

Soluție. Vom deosebi mai multe cazuri.

1°). $a \in \mathbf{R}$. Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$. Fie $V_a = (\alpha, \beta)$, o vecinătate a lui a. Deci $a \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < a < \beta$.

Fie $V'_a = (\alpha', \beta')$ astfel încît $\alpha < \alpha' < a < \beta' < \beta$. Din ipoteza b°) rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ $n > n_\varepsilon$ avem:

$$\alpha' < \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} < \beta'$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\alpha'(v_{n+1} - v_n) < u_{n+1} - u_n < \beta'(v_{n+1} - v_n).$$

Să scriem aceste inegalități pentru $n_\varepsilon,\ n_\varepsilon + 1, \ldots, n - 1$:

$$\alpha'(v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon}) < u_{n_\varepsilon+1} - u_{n_\varepsilon} < \beta'(v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon})$$

$$\alpha'(v_{n_\varepsilon+2} - v_{n_\varepsilon+1}) < u_{n_\varepsilon+2} - u_{n_\varepsilon+1}) < \beta'(v_{n_\varepsilon+2} - v_{n_\varepsilon+1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha'(v_n - v_{n-1}) < u_n - u_{n-1} < \beta'(v_n - v_{n-1})$$

pe care, dacă le adunăm, obținem:

$$\alpha'(v_n - v_{n_\varepsilon}) < u_n - u_{n_\varepsilon} < \beta'(v_n - v_{n_\varepsilon}).$$

Împărțind cu v_n, care poate fi considerat pozitiv deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, obținem:

$$\alpha'\left(1 - \frac{v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right) < \frac{u_n}{v_n} - \frac{u_{n_\varepsilon}}{v_{n_\varepsilon}} < \beta'\left(1 - \frac{v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right)$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\alpha' + \left(\frac{u_{n_\varepsilon}}{v_n} - \frac{\alpha' v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right) < \frac{u_n}{v_n} < \beta' + \left(\frac{u_{n_\varepsilon}}{v_n} - \frac{\beta' v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right).$$

Deoarece expresiile din paranteze tind către zero, pentru că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ rezultă că $(\exists) n'_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, $n > n'_\varepsilon$ au loc inegalitățile:

$$\alpha < \alpha' + \left(\frac{u_{n_\varepsilon}}{v_n} - \frac{\alpha' v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right),\ \beta > \beta' + \left(\frac{u_{n_\varepsilon}}{v_n} - \frac{\beta' v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right).$$

Prin urmare:

$$\alpha < \frac{u_n}{v_n} < \beta,\ (\forall) n > n'_\varepsilon$$

deci șirul $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a$.

2°). $a = +\infty$. Fie $V_{+\infty} = (\alpha, +\infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$ și fie $V'_{+\infty} = (\alpha', +\infty) \subset (\alpha, +\infty)$. Continuînd raționa-

mentul ca și în cazul $a \in \mathbf{R}$ obținem că șirul $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent și:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a = +\infty.$$

3°). $a = -\infty$. Procedăm ca și în cazul $a = +\infty$, alegînd o vecinătate $V_{-\infty} = (-\infty, \alpha)$ și apoi luînd o altă vecinătate $V'_{-\infty} \subset V_{-\infty}$ unde $V'_{-\infty} = (-\infty, \alpha')$, rezultă că și în acest caz șirul $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent și $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a = -\infty$.

3.28*. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *o funcție subadditivă pe* $\mathbf{R}$ *adică:*

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y), \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}, \ g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$$

o funcție crescătoare și subadditivă pe $\mathbf{R}_+$ *și* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *un șir de numere reale. Să se demonstreze că dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (g \circ f)(x_i) = 0$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = 0.$$

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Vom considera funcția, $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$. Avem:

$$(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) \leqslant g(f(x) + f(y)) \leqslant g(f(x)) +$$

$$+ g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y), \ (\forall)x, y \in \mathbf{R}.$$

Deci, funcția $g \circ f$ este subadditivă pe $\mathbf{R}$.
Pentru șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avem:

$$(g \circ f)(x_0 + x_1) \leqslant (g \circ f)(x_0) + (g \circ f)(x_1). \qquad (1)$$

Presupunem că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant k$ avem:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n} (g \circ f)(x_i) \qquad (2)$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{k+1} (g \circ f)(x_i).$$

Într-adevăr:

$$(g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{k+1} x_i\right) = (g \circ f)\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + x_{k+1}\right) \overset{(1)}{\leqslant}$$

$$\overset{(1)}{\leqslant} (g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) + (g \circ f)(x_{k+1}) \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{k} (g \circ f)(x_i) +$$

$$+ (g \circ f)(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (g \circ f)(x_i).$$

Deci, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$0 \leqslant (g \circ f)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n} (g \circ f)(x_i).$$

De aici, trecînd la limită după n și ținînd seama de faptul că:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} (g \circ f)(x_i) = 0$$

rezultă enunțul.

3.29*. *Se consideră șirul* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *unde*

$$u_{n+1} = u_n + r,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*,\ u_1 = a, r \in \mathbf{R}_+^*.$$

Fie $w \in \mathbf{Q}_+^*$ *și*

$$s_{n,w}(a, r) = \sum_{i=1}^{n} u_n^w.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_{n,w}(a, r)}{u_n^{w+1}}.$$

(D.M. Bătinețu, G.M.B., 10016)

Soluție. Deoarece $a, r > 0$ atunci $u_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ de unde rezultă că: u_n^w are sens $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall) w \in \mathbf{Q}_+^*$ deci $s_{n,w}(a, r)$ are sens $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall)\ w \in \mathbf{Q}_+^*$.

Din faptul că $w \in \mathbf{Q}_+^*$ rezultă că există $p, t \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $w = \frac{p}{t}$. Să verificăm dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei CESARO-STOLZ pentru șirurile de termeni generali $a_n = s_{n,w}(a, r)$, $b_n = u_n^{w+1}$.

1°). Din $u_n < u_{n+1}$ rezultă $u_n^{w+1} < u_{n+1}^{w+1} \Leftrightarrow b_n < b_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, adică șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător și nemărginit, deci divergent la $+\infty$.

2°). Să vedem dacă există $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$. Avem:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{s_{n+1,w}(a, r) - s_{n,w}(a, r)}{u_{n+1}^{w+1} - u_n^{w+1}} = \frac{u_{n+1}^w}{u_{n+1}^{w+1} - u_n^{w+1}} =$$

$$= \frac{u_{n+1}^{\frac{p}{t}}}{u_{n+1}^{\frac{p+t}{t}} - u_n^{\frac{p+t}{t}}} = \frac{u_{n+1}^{\frac{p}{t}} \cdot \sum\limits_{j=0}^{t-1} u_{n+1}^{\frac{p+t}{t} \cdot (t-j-1)} \, u_n^{\frac{p+t}{t} \cdot j}}{u_{n+1}^{p+t} - u_n^{p+t}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{t-1} u_{n+1}^{\frac{(p+t)(t-j)-t}{t}} \, u_n^{\frac{p+t}{t} \cdot j}}{u_{n+1}^{p+t} - u_n^{p+t}} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{t-1} \left(u_{n+1}^{(p+t)(t-j)-t} \, u_n^{(p+t)j} \right)^{\frac{1}{t}}}{u_{n+1}^{p+t} - u_n^{p+t}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{t-1} \left(\sum\limits_{k=0}^{(p+t)(t-j)-t} C_{(p+t)(t-j)-t}^{k} \, u_n^{(p+t-1)t-k} \, r^k \right)^{\frac{1}{t}}}{u_{n+1}^{p+t} - u_n^{p+t}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{t-1} \left(\sum\limits_{k=0}^{(p+t)(t-j)-t} C_{(p+t)(t-j)-t}^{k} \, u_n^{-k} \, r^k \right)^{\frac{1}{t}}}{\sum\limits_{k=1}^{p+t} C_{p+t}^{k} \, u_n^{1-k} \, r_k}$$

de unde prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{t-1}\left(\sum_{k=0}^{(p+t)(t-j)-t}C^k_{(p+t)(t-j)-t}\cdot u_n^{\dots k}\,r^k\right)^{\frac{k}{t}}}{\sum_{k=1}^{p+t}C^k_{p+t}\,u_n^{t-k}\,r^k}=$$

$$=\frac{\sum_{j=0}^{t-1}C^0_{(p+t)(t-j)-t}}{r\cdot C^1_{p+t}}=\frac{t}{r(p+t)}=\frac{1}{r\left(1+\frac{p}{t}\right)}=\frac{1}{r(1+w)}.$$

Rezultă atunci conform concluzici teoremei CESARO-STOLZ că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n,w}(a,\,r)}{u_n^{w+1}}=\frac{1}{r(1+w)}.$$

Cazuri particulare. a°). Dacă $p=k,\ t=1,\ r=1,\ a=1$ atunci obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

b°). Dacă $p=k,\ t=1,\ r=2,\ a=1$ atunci obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+5^k+\dots+(2n-1)^k}{(2n-1)^k}=\frac{1}{2(k+1)}.$$

c°). Dacă $p=1,\ t=2,\ r=1,\ a=1$ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n})=\frac{2}{3}.$$

3.30. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir astfel încît* $a_1>0$ *și*

$$a_{n+1}=a_n+r,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*,\ r>0.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\dots a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\dots a_n}}.$$

(Maria Giurgiu)

Soluție. Folosim teorema: „dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir de numere strict pozitive și dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x$, finită sau infinită atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x$". Avem:

$$\frac{\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\dots a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\dots a_n}}=\frac{\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\dots a_n\cdot a_{n+1}}}{a_{n+1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\dots a_n}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad (1)$$

Avem în vedere că:

$$\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\dots a_n}}=\sqrt[n]{\frac{a_n^n}{a_1\cdot a_2\dots a_n}}$$

și deci, luînd în rolul șirului $x_n=\frac{a_n^n}{a_1\cdot a_2\dots a_n}$ obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\dots a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{n+1}}{a_1\cdot a_2\dots a_n\cdot a_{n+1}}\cdot\frac{a_1\cdot a_2\dots a_n}{a_n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{r}}\right)^{\frac{nr}{a_n}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nr}{a_1+(n-1)r}}=e.$$

Trecînd la limită în (1) obținem: $l=\frac{1}{e}\cdot e\cdot 1=1$

unde l este limita din enunț.

3.31*. *Se consideră șirul de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu proprietatea că* $(\exists)\, m\in\mathbf{N}$ *astfel încît* $x_{m+1}=2$ *și :*

$$\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^{n-m-1}}-1}=1+\frac{1}{\frac{1}{x_n^{n-m}}-1},\ (\forall)\, n>m.$$

Să se demonstreze că șirul dat este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(D.M. Bătineț, G.M., 16908)

Soluție. Pentru $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ să notăm $y_k = x_{m+k}$, atunci șirul $(y_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ satisface relația:

$$\frac{1}{\frac{1}{y_{k+1}^{k+1}} - 1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{y_k^k} - 1},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*,\ y_1 = x_{m+1} = 2.$$

Dacă pentru $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ notăm $z_k = y_k^{\frac{1}{k}}$, atunci șirul $(z_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ satisface condițiile $z_1 = y_1 = 2$ și:

$$\frac{1}{z_{k+1} - 1} = 1 + \frac{1}{z_k - 1},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Din această ultimă condiție obținem:

$$z_{k+1} = 2 - \frac{1}{z_k},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrăm prin inducție că:

$$z_k = 1 + \frac{1}{k},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr, pentru $k = 1$, avem $z_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Presupunem că pentru $k = p$ avem $z_p = 1 + \frac{1}{p}$ și să demonstrăm că pentru $k = p + 1$ avem:

$$z_{p+1} = 1 + \frac{1}{p+1}.$$

Într-adevăr:

$$z_{p+1} = 2 - \frac{1}{z_p} = 2 - \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = 2 - \frac{p}{p+1} =$$

$$= \frac{2p + 2 - p}{p+1} = \frac{p+2}{p+1} = 1 + \frac{1}{p+1}.$$

Prin urmare, am demonstrat, că:

$$z_k = 1 + \frac{1}{k},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*,$$

Rezultă atunci că $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$y_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

și prin trecere la limită, rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = e$.

În definitiv, am demonstrat că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

3.32*. *Se consideră șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de termen general* $u_n = a^n \cdot C_{2n}^n$ *unde* $a \in (0, 1)$. *Să se discute convergența șirului* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *în funcție de parametrul* $a \in (0, 1)$ *și să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

(Maria Giurgiu)

Soluție. Conform enunțului avem:

$$u_n = a^n \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2},\ u_{n+1} = a^{n+1} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ rezultă:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2a \cdot \frac{2n+1}{n+1} < 2a \leqslant 1,$$

ceea ce dovedește că șirul este strict descrescător. Deoarece $u_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ rezultă că șirul este convergent, adică $(\exists) \lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathbf{R}$.

Pentru $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right] - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ avem:

$$u_{n+1} = 2a \cdot u_n \cdot \frac{2n+1}{n+1}$$

de unde prin trecere la limită rezultă $u = 4au \Rightarrow u = 0$.

Dacă $a = \frac{1}{4}$ atunci avem:

$$0 < u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \ldots 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} <$$

$$< \sqrt{\frac{1}{2n+1}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Ultima inegalitate se demonstrează prin inducție matematică.

Prin trecere la limită în această inegalitate rezultă că:

$$0 \leqslant u \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ atunci notînd $v_n = \frac{1}{u_n}$ avem:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{((n+1)!)^2}{a^{n+1}(2n+2)!} \cdot \frac{a^n(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2a(2n+1)} < \frac{1}{2a} < 1.$$

Deci $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător și mărginit de zero, prin urmare este convergent, adică $(\exists)\ v = \lim_{n\to\infty} v \in \mathbb{R}$.

Prin urmare:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2a} \cdot v_n \cdot \frac{n+1}{2n+1}$$

de unde, prin trecere la limită obținem:

$$v = \frac{v}{4a} \Leftrightarrow 4av = v \Leftrightarrow v(4a-1) = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Rezultă atunci că șirul $u_n = \frac{1}{v_n}$ este strict crescător și nemărginit pentru $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ adică este divergent și $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

3.33. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir definit astfel:*

$$x_n = 2x_{n-1}^2 - 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

cu $x_1 \geqslant 2$ *fixat. Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

Soluție. Se deduce prin inducție că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător deci $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ există. Dacă am avea $x < \infty$, atunci trecînd la limită în relația:

$$x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$$

obținem $x = 2x^2 - 1$ ceea ce este absurd.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Evident avem:

$$x_n^2 - 1 = (x_n + 1)(x_n - 1) = 2x_{n-1}^2(2x_{n-1}^2 - 2) =$$
$$= 4x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 1).$$

Obținem deci relațiile:

$$x_n^2 - 1 = 4x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 1)$$
$$x_{n-1}^2 - 1 = 4x_{n-2}^2(x_{n-2}^2 - 1)$$
$$x_2^2 - 1 = 4x_1^2(x_1^2 - 1)$$

deci:

$$x_n^2 - 1 = 4^{n-1}x_{n-1}^2 \cdot x_{n-2}^2 \ldots x_1^2(x_1^2 - 1)$$

și deci:

$$\frac{x_n}{2^n \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} = \frac{x_n}{2^n \sqrt{\frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{x_n^2 - 1}{x_1^2 - 1}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{2} \cdot \sqrt{\frac{x_n^2}{x_n^2 - 1}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$, din ultima egalitate deducem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{2^n \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 - 1}.$$

3.34*. *Fie* $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ *o progresie aritmetică de numere naturale. Pentru orice* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *și* $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *să notăm:*

$$b_i^{(n)} = \sum_{j=n^{k_{2i-1}}+1}^{n^{k_{2i}}} \frac{1}{j}.$$

Să se calculeze limita șirului de termen general:

$$a_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{p} b_i^{(n)}, \quad n \geqslant 2.$$

(Maria Giurgiu)

Soluție. Notînd $d_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ obținem că:

$$b_i^{(n)} = d_{n^{k_{2i}}} - d_{n^{k_{2i-1}}}, \quad (\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} (d_n - \ln n) = C$$

rezultă că $(\exists)$ $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad d_n = C + u_n + \ln n.$$

Prin urmare:

$$b_i^{(n)} = u_{n^{k_{2i}}} + k_{2i} \ln n - u_{n^{k_{2i-1}}} - k_{2i-1} \ln n =$$

$$= r \ln n + u_{n^{k_{2i}}} - u_{n^{k_{2i-1}}}$$

unde r este rația progresiei din enunț.

Deci:

$$a_n = \frac{1}{\ln n}\left(pr \ln n + \sum_{i=1}^{p} (u_{n^{k_{2i}}} - u_{n^{k_{2i-1}}})\right) =$$

$$= pr + \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{p} (u_{n^{k_{2i}}} - u_{n^{k_{2i-1}}}),$$

de unde, prin trecere la limită obținem $\lim_{n\to\infty} a_n = pr$.

3.35*. *Fie* $a, b \in \mathbf{N}^*$ *și* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *o funcție astfel încît:*

$$f(x) = \frac{a}{a+b} \cdot \{x\}_{a,b}$$

unde:

$$\{x\}_{a,b} = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{a}{a+b}\right] \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in \left(\frac{a}{a+b}, 1\right] \end{cases}$$

Dacă pentru orice $x \in [0, 1]$ *şi orice* $n \in \mathbf{N}^*$ *notăm:*

$$a_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(x),$$

să se arate că $\lim_{n \to \infty} a_n(x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in [0, 1]$.

(D.M. Bătineţu, G.M. 16988, 1977)

Soluţie. Dacă $x \in \left[0, \frac{a}{a+b}\right]$ atunci:

$$0 \leqslant \frac{a}{a+b} \cdot \{x\}_{a,b} \leqslant \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 < \frac{a}{a+b}.$$

Iar dacă $x \in \left[\frac{a}{a+b}, 1\right]$ atunci:

$$0 \leqslant 1 - x < 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

şi deci, în acest caz:

$$0 \leqslant \frac{a}{a+b}(1-x) < \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} < \frac{a}{a+b}.$$

ceea ce ne arată că:

$$0 \leqslant \frac{a}{a+b}\{x\}_{a,b} < \frac{a}{a+b}.$$

Prin urmare rezultă că:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{a}{a+b} \cdot \{x\}_{a,b}\right) =$$

$$= \frac{a}{a+b}\left\{\frac{a}{a+b}\{x\}_{a,b}\right\}_{a,b} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot \{x\}_{a,b}.$$

Să presupunem că pentru orice $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ avem:

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(x) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n \{x\}_{a,b}.$$

Atunci:

$$\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n+1\text{ ori}}(x)=f(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ ori}})(x))=$$

$$=f\left(\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\cdot\{x\}_{a,b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n+1}\cdot\{x\}_{a,b}.$$

Conform principiului inducției complete rezultă că:

$$\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n\text{ ori}}(x)=a_n(x)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\{x\}_{a,b},$$

$$(\forall)n\in\mathbf{N}^*\text{ și }(\forall)x\in[0,1].$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n\text{ ori}}(x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\{x\}_{a,b}=0,\quad(\forall)x\in[0,1].$$

3.36. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_k)}-n\right),$$

$$k\in\mathbf{N}^*-\{1\}.$$

unde $a_i\in\mathbf{R}$, $(\forall)\,i\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_k)}-n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_k)-n^k}{\sqrt[k]{(n+a_1)^{k-1}(n+a_2)^{k-1}\ldots(n+a_k)^{k-1}}+}$$

$$\frac{}{+n\sqrt[k]{(n+a_1)^{k-2}(n+a_2)^{k-2}\ldots(n+a_k)^{k-2}}+\ldots+n^{k-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)n^{k-1}+\ldots+a_1a_2\ldots a_k}{n^{k-1}\left(\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)^{k-1}\left(1+\frac{a_2}{n}\right)^{k-1}\ldots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)^{k-1}}+\right.}$$

$$\left.+\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)^{k-2}\left(1+\frac{a_2}{n}\right)^{k-2}\ldots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)^{k-2}}+\ldots+1\right)=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}.$$

3.37*. *Fie* $a \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_{2p}$ *numere naturale. Pentru orice* $i \in \{2, 4, \ldots, 2p\}$ *şi* $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *să notăm:*

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=n^{m_{i-1}+1}}^{n^{m_i}} \frac{1}{j}.$$

Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$b_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{p} a_{2i}^{(n)}, \quad n \geqslant 2$$

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. Dacă notăm $d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ atunci rezultă că

$$a_{2i}^{(n)} = d(n^{m_{2i}}) - d(n^{m_{2i-1}}), \quad (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Deoarece:

$\lim_{n\to\infty} (d(n) - \ln n) = C$ rezultă că $(\exists)\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad d(n) = C + u_n + \ln n.$$

Prin urmare:

$$a_{2i}^{(n)} = u_{n^{m_{2i}}} + m_{2i} \cdot \ln n - u_{n^{m_{2i-1}}} - m_{2i-1} \cdot \ln n =$$

$$= (m_{2i} - m_{2i-1}) \ln n + u_{n^{m_{2i}}} - u_{n^{m_{2i-1}}} =$$

$$= r_i \ln n + u_{n^{m_{2i}}} - u_{n^{m_{2i-1}}}$$

unde:

$$r_i = m_{2i} - m_{2i-1}, \quad (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Rezultă deci că:

$$b_n = \frac{1}{\ln n}\left((r_1 + r_2 + \ldots + r_p) \ln n + \sum_{i=1}^{p} (u_{n^{m_{2i}}} - u_{n^{m_{2i-1}}})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} r_i + \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{p} (u_{n^{m_{2i}}} - u_{n^{m_{2i-1}}}).$$

Prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{i=1}^{p} r_i = \sum_{i=1}^{p} (m_{2i} - m_{2i-1}).$$

3.38. *Să se calculeze limita șirului cu termenul general*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{i} (n + b_j) \right)^{\frac{1}{i}} - nk, \quad b_j \in \mathbf{R}.$$

Soluție. Termenul general al șirului se mai scrie:

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \left(\left(\prod_{j=1}^{i} (n + b_j) \right)^{\frac{1}{i}} - n \right).$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} (n + b_j)^{\frac{1}{i}} - n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{i} (n + b_j) - n^i}{\sum_{m=0}^{i-1} \left(\prod_{j=1}^{i} (n + b_j) \right)^{\frac{i-m-1}{i}} n^m} =$$

$$= \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_i + \frac{b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b_{i-1} b_i}{n} + \ldots + \frac{b_1 b_2 \ldots b_i}{n^{i-1}}}{\sum_{m=0}^{i-1} \left(\prod_{j=1}^{i} \left(1 + \frac{b_j}{n} \right) \right)^{\frac{m}{i}}} =$$

$$= A(b_1, b_2, \ldots, b_i) = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_i}{i}$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{i=1}^{k} A(b_1, b_2, \ldots, b_i).$$

3.39. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n+k]{x} - \sqrt[n+m]{x} \right)$$

unde $x \in \mathbf{R}_+^*$, $m, k \in \mathbf{N}$, $k < m$.

(D. M. Bătinețu)

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n+k]{x}-\sqrt[n+m]{x}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\sqrt[n+m]{x}\cdot\left(x^{\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+m}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+m]{x}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(m-k)}{(n+k)(n+m)}\cdot\frac{(n+k)(n+m)}{m-k}\left(x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1\right)=$$

$$=(m-k)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k)(n+m)}{m-k}\left(x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1\right). \qquad (1)$$

Dacă $x=1$ atunci este evident că:

$$\frac{(n+k)(n+m)}{m-k}\left(x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1\right)=0,\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$$

și atunci rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k)(n+m)}{m-k}\left(x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1\right)=0=\ln 1.$$

Dacă $x>1$ atunci notînd:

$$u_n=x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}-1$$

rezultă:

$$x^{\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}}=u_n+1$$

de unde obținem:

$$\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}\cdot\ln x=\ln(1+u_n)$$

prin urmare, avem:

$$\frac{m-k}{(n+k)(n+m)}=\frac{\ln(1+u_n)}{\ln x}$$

și atunci din (1) obținem:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n+k]{x}-\sqrt[n+m]{x}\right)=(m-k)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+u_n)}\ ;\ u_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}}\cdot(m-k)\ln x=(m-k)\ln x.$$

Pentru $x\in(0,1)$ notînd $y=\frac{1}{x}$ rezultă $x=\frac{1}{y}$ și deci obținem:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n+k]{x}-\sqrt[n+m]{x}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{\sqrt[n+k]{y}}-\frac{1}{\sqrt[n+m]{y}}\right)=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+k]{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+m]{y}}\cdot n^2\left(\sqrt[n+k]{y}-\sqrt[n+m]{y}\right)=$$

$$=-(m-k)\ln y=-(m-k)\ln\frac{1}{x}=(m-k)\ln x.$$

În concluzie:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n+k]{x}-\sqrt[n+m]{x}\right)=(m-k)\ln x,$$

$$(\forall)\,x\in\mathbf{R}_+^*,\quad m,k\in\mathbf{N},\ k<m.$$

3.40. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b(n+a)}{n!}},\ a\in\mathbf{R},\ b\in(0,+\infty).$$

Soluție. Este evident că $(\forall)\,a\in\mathbf{R}$, $(\exists)\,n_a\in\mathbf{N}^*$ astfel încît $n+a>0$, $(\forall)n\geq n_a$ și deci șirul din enunț este definit pentru $n\geq n_a$.

Notăm: $a_n=\sqrt[n]{\frac{b(n+a)}{n!}}$, $(\forall)n\geq n_a$,

și atunci:

$$\ln a_n=\ln n+\frac{\ln b+\ln(n+a)-\ln n!}{n}=$$

$$=\frac{n\ln n+\ln b+\ln(n+a)-\ln n!}{n}.$$

Aplicăm teorema CESARO-STOLZ și obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} ((n+1)\ln(n+1) + \ln b + \ln(n+a+1) -$$

$$- \ln(n+1)! - n\ln n - \ln b - \ln(n+a) + \ln n!) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(n+1)^{n+1}(n+a+1)\cdot n!}{n^n(n+1)!\,(n+a)} =$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+a+1}{n+a} = \ln e.$$

Prin urmare, avem: $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

3.41*. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+b]{(n+b)!} - \sqrt[n+d]{(n+d)!}\right)$$

unde $b, d \in \mathbf{N}$, $b > d$.

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. În problema lui TRAIAN LALESCU **(3.20)** am demonstrat că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = e^{-1}. \qquad (1)$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+b]{(n+b)!} - \sqrt[n+d]{(n+d)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{b-d-1} \left(\sqrt[n+d+i+1]{(n+d+i+1)!} - \sqrt[n+d+i]{(n+d+i)!}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{b-d-1} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+d+i+1]{(n+d+i+1)!} - \sqrt[n+d+i]{(n+d+i)!}\right) =$$

$$= (b-d)\cdot e^{-1}$$

unde am ţinut seama că în conformitate cu (1) obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+d+i+1]{(n+d+i+1)!} - \sqrt[n+d+i]{(n+d+i)!}\right) = e^{-1},$$

$$(\forall) d \in \mathbf{N} \text{ și } (\forall) i \in \mathbf{N}.$$

3.42. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un şir strict crescător şi nemărginit astfel încît* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=x\in\mathbf{R}$. *Să se calculeze:*

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^{x_n},$$

unde $a_i\in\mathbf{R}_+^*$ $(\forall)\,i\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Soluţie. Avem:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_n}}{k}\right)^{x_n}=\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt[n]{a_i}-k}{k}\right)^{x_n}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\sqrt[n]{a_i}-1)}{k}\right)^{\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}(\sqrt[n]{a_i}-1)}}\right)^{\frac{x_n}{k}\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}(\sqrt[n]{a_i}-1)},$$

$$(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*-\{1\}.$$

De aici, prin trecere la limită obţinem:

$$y=e^{\frac{1}{k}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}n(\sqrt[n]{a_i}-1)}=e^{\frac{x}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\ln a_i}=\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{\frac{x}{k}}.$$

3.43. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un şir de numere reale* $x\in\mathbf{R}$ *şi un şir* $(b_n)_{n\geq 2}$ *astfel încît:*

$$b_n=\sin a_1x\sin a_2x\ldots\sin a_nx+\cos a_1x\cdot\cos a_2x\ldots\cos a_nx.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}$.

Soluţie. Avem:

$$|b_n|=\left|\prod_{i=1}^{n}\sin a_ix+\prod_{i=1}^{n}\cos a_ix\right|\leq$$

$$\leq\left|\prod_{i=1}^{n}\sin a_ix\right|+\left|\prod_{i=1}^{n}\cos a_ix\right|\leq$$

$$\leq|\sin a_1x\sin a_2x|+|\cos a_1x\cos a_2x|=M.$$

După semnele expresiilor $\sin a_1 x \sin a_2 x$ și $\cos a_1 x \cos a_2 x$ rezultă că:

$$M = |\cos(a_1 \pm a_2)x| \leqslant 1$$

și prin urmare $|b_n| \leqslant 1$.

Rezultă atunci că:

$$0 \leqslant \frac{b_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

de unde prin trecere la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$.

3.44. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_1, b_1, r > 0$, $q > 1$ *și*

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}.$$

Soluție. Fie:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j + r}{qb_j} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_k} + \frac{r}{q}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} s_n - \frac{a_n}{qb_n} +$$

$$+ \frac{r}{b_1 q}\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{q^i} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q}\cdot s_n - \frac{a_n}{qb_n} + \frac{r}{b_1 q}\cdot \frac{1 - \frac{1}{q^{n-1}}}{1 - \frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q}\cdot s_n - \frac{a_n}{qb_n} + \frac{r(q^{n-1} - 1)}{b_1 q^{n-1}(q-1)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q}\cdot s_n - \frac{a_n}{qb_n} +$$

$$+ \frac{r(q^{n-1} - 1)}{b_n(q-1)} \Rightarrow s_n = \frac{a_1 q}{b_1(q-1)} - \frac{a_n}{b_n(q-1)} + \frac{r(q^n - q)}{b_n(q-1)^2} =$$

$$= \frac{a_1 q}{b_1(q-1)} + \frac{rq(q^{n-1} - 1) - a_n(q-1)}{b_n(q-1)^2} =$$

$$= \frac{a_1 q}{b_1(q-1)} + \frac{rq^n}{b_1 q^{n-1}(q-1)^2} - \frac{rq}{b_n(q-1)^2} - \frac{a_n}{b_n(q-1)} =$$

$$= \frac{a_1 q}{b_1(q-1)} + \frac{rq}{b_1(q-1)^2} - \frac{rq}{b_n(q-1)} - \frac{a_n}{b_n(q-1)}.$$

De aici prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{b_1(q-1)}\cdot\left(a_1 + \frac{r}{q-1}\right).$$

3.45. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^a}{(bn)!}}$$

unde $a, b \in \mathbf{N}$.

Soluția I. Notînd

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^a}{(bn)!}}\ ,$$

rezultă că

$$\ln u_n = v_n = \frac{1}{n}\left(a\ln(n!) - \ln(bn)!\right)$$

și deci aplicînd teorema lui CEȘARO-STOLZ obținem:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}(a\ln(n+1)! - a\ln n! - \ln(nb+b)! + \ln(bn)!) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a\ln\frac{(n+1)!}{n!} - \ln\frac{(b(n+1))!}{(bn)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a\ln(n+1) - \ln(bn+1) - \ln(bn+2) - \ldots - \ln(bn+b)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\frac{(n+1)^a}{(bn+1)(bn+2)\ldots(bn+b)} =$$

$$= \ln\lim_{n\to\infty}\frac{n^a\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{b^b n^b\left(1+\frac{1}{bn}\right)\left(1+\frac{2}{bn}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{bn}\right)} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & , \text{ dacă } a < b \\ -\ln a^a, & \text{dacă } a = b. \\ +\infty & , \text{ dacă } a > b \end{cases}$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } a < b \\ a^{-a} & , \text{ dacă } a = b. \\ +\infty, & \text{dacă } a > b \end{cases}$$

Soluția a II-a. Folosim teorema:

„Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale strict pozitive și dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x$, finită sau infinită, atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ și este egală cu x".

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^a}{(bn)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^a}{(bn+b)!}\cdot\frac{(bn)!}{(n!)^a}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^a}{(bn+1)(bn+2)\ldots(bn+b)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{b^bn^b\left(1+\frac{1}{bn}\right)\left(1+\frac{2}{bn}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\begin{cases}0 & ,\text{ dacă } a<b\\ a^{-a} & ,\text{ dacă } a=b.\\ +\infty, & \text{dacă } a>b\end{cases}$$

3.46. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}max\left(sin\,k\frac{\pi}{2},\ cos\,k\frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție. Avem:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\max\left(\sin k\frac{\pi}{2},\ \cos k\frac{\pi}{2}\right)=\max\left(\sin\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\max(\sin\pi,\ \cos\pi)+\max\left(\sin\frac{3\pi}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2}\right)+$$

$$+\max(\sin 2\pi,\ \cos 2\pi)+\ldots=1+0+0+1+1+0+\ldots$$

Deci dacă considerăm șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, ..., în care:

$$x_{4m}=1,\ x_{4m+1}=1,\ x_{4m+2}=x_{m+3}=0$$

obținem:

$$s_{4m} = 2m = \left[\frac{4m}{4}\right]_* + \left[\frac{4m+3}{4}\right]_*, \quad s_{4m+1} = s_{4m} + 1 = 2m + 1 =$$

$$= \left[\frac{4m+1}{4}\right]_* + \left[\frac{4m+4}{4}\right]_*, \quad s_{4m+2} = s_{4m+1} + 0 = 2m + 1 =$$

$$= \left[\frac{4m+2}{4}\right]_* + \left[\frac{4m+5}{4}\right]_*, \quad s_{4m+3} = s_{4m+2} + 0 = 2m + 1 =$$

$$= \left[\frac{4m+3}{4}\right]_* + \left[\frac{4m+6}{4}\right]_*.$$

În definitiv, avem:

$$s_n = \left[\frac{n}{4}\right]_* + \left[\frac{n+3}{4}\right]_*, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare:

$$\frac{1}{n} s_n = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{4}\right]_* + \left[\frac{n+3}{4}\right]_*\right).$$

Avînd în vedere că:

$$\left[\frac{n}{4}\right]_* \leqslant \frac{n}{4} < \left[\frac{n}{4}\right]_* + 1, \left[\frac{n+3}{4}\right]_* \leqslant \frac{n+3}{4} < \left[\frac{n+3}{4}\right]_* + 1$$

prin adunare rezultă:

$$s_n \leqslant \frac{2n+3}{4} < s_n + 2.$$

Prin urmare:

$$\frac{1}{n} \cdot s_n \leqslant \frac{2n+3}{4n} < \frac{1}{n} \cdot s_n + \frac{2}{n}.$$

De unde, prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot s_n \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot s_n$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot s_n = \frac{1}{2}.$$

3.47. *Fiind dat şirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde* $a_n = a + (n-1)r$ *cu* a, $r > 0$ *şi notînd*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot s_n\right)^n$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(D.M. Bătineţu, G.M.B., 10048)

Soluţie. Avem:

$$\frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right), \quad (\forall) i \in \mathbf{N}^*$$

şi atunci:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$s_n = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 a_{n+1}} = \frac{nr}{ra_1(a_1 + nr)} = \frac{n}{a_1(a_1 + nr)}.$$

Deci:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot s_n\right)^n = \left(1 + \frac{1}{a_1(a_1 + nr)}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{a_1(a_1 + nr)}\right)^{a_1(a_1+nr)}\right)^{\frac{n}{a_1(a_1+nr)}}$$

de unde prin trecere la limită, obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{\frac{1}{a_1 r}}$.

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = e^{\frac{1}{a_1 r}}, \quad u_n \neq 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

3.48. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)},\quad k\in\mathbf{N}^*.$$

(Mircea Troi, R.M.T., 3/1973)

Soluție. Avem:

$$a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+n)}}{n}$$

și atunci, avem:

$$\ln a_n=\frac{\ln(n+k)+\ln(n+k+1)+\ldots+\ln(n+n)}{n}-$$

$$-\ln n=\frac{\ln(n+k)+\ln(n+k+1)+\ldots+\ln(n+n)-n\ln n}{n}.$$

Aplicăm teorema lui CESARO-STOLZ și obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\ln a=\lim_{n\to\infty}(\ln(2n-1)+\ln(2n+2)-\ln(n+k)-$$

$$-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2(2n+1)(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+k)}=$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n+k}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\ln\frac{4}{e}$$

și deci rezultă, $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{e}$.

3.49. *Se consideră șirul de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu proprietatea că există* $k, m\in\mathbf{N}$ *astfel încît:*

$$a_{n+1}^2<a_n^2$$

oricare ar fi $n\geq k$ *și*

$$a_{n+1}^3+a_n^3<1<a_{n+1}+a_n$$

oricare ar fi $n\geq m$.

Să se demonstreze că șirul dat este convergent.

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Fie $p = \max(k, m)$; atunci:

$$a_{n+1}^2 < a_n^2 \text{ și } a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n, \ (\forall)\ n \geqslant p.$$

Ne ocupăm deci de șirul $(a_n)_{n \geqslant p}$.

Șirul $(a_n)_{n \geqslant p}$ *este mărginit.* Avem sucesiv:

$$(a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}^3 < 1 - a_n^3 \text{ și } 1 - a_n < a_{n+1}, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - a_n)^3 < a_{n+1}^3 < 1 - a_n^3, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 3a_n + 3a_n^2 - a_n^3 < 1 - a_n^3, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3a_n(a_n - 1) < 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p). \qquad (1)$$

În inegalitatea (1) sînt de analizat două cazuri:

a°). $(a_n < 0, \ a_n - 1 > 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n < 0, \ a_n < 1, \ (\forall) n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p)$ ceea ce este o contradicție.

b°). $(a_n > 0, \ a_n - 1 < 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow (a_n > 0,$
$a_n < 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Leftrightarrow (a_n \in (0, 1), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$
$n \geqslant p).$ (2)

Relația (2) ne arată că șirul $(a_n)_{n \geqslant p}$ este mărginit.

Șirul $(a_n)_{n \geqslant p}$ *este monoton.* Deoarece $a_n \in (0, 1)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p$, rezultă că:

$$a_{n+1} + a_n > 0, \ (\forall) n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p.$$

Prin urmare:

$$(a_{n+1}^2 < a_n^2, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) < 0, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p)$$

și, deoarece:

$$a_{n+1} + a_n > 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p$$

rezultă din afirmația precedentă că

$$(a_{n+1} - a_n) < 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p$$

ceea ce este echivalent cu:

$$(a_{n+1} < a_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant p).$$

Cu alte cuvinte, şirul $(a_n)_{n\geq p}$ este strict descrescător. Fiind monoton şi mărginit, şirul $(a_n)_{n\geq p}$ este convergent.

Deci şi şirul iniţial, care se obţine din $(a_n)_{n\geq p}$ adăugîndu-i un număr de p termeni este convergent.

3.50*. *Dacă* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este o progresie aritmetică a.î.;* $a_1, r \in \mathbf{R}_+^*$ *şi dacă* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un şir de numere reale strict pozitive a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x \in \mathbf{R}$, *să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i x_i}.$$

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. Folosind inegalitatea mediilor rezultă că:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (1)$$

şi deci dacă vom demonstra că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

din inegalitatea (1) obţinem că limita din enunţ este zero.

Avem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_n s_n - r \sum_{i=1}^{n-1} s_i$$

unde $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ şi atunci

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = s_n - r \cdot \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{a_n}.$$

Prin aplicarea teoremei CESARO-STOLZ din ultima egalitate obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = x - r \lim_{n\to\infty} \frac{s}{a_{n+1} - a_n} =$$

$$= x - \lim_{n\to\infty} s_n = x - x = 0.$$

3.51*. *Se consideră șirul de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încît oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$ *avem:*

$$a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n$$

și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, *există* $k(n) \in \mathbb{N}$ *astfel încît*

$$a_{n+1}^{2k(n)+1} < a_n^{2k(n)+1}.$$

Să se demonstreze că șirul este convergent.

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Dacă vom demonstra că șirul dat este monoton și mărginit, va rezulta că este convergent.

Mărginirea. Avem succesiv:

$$(a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}^3 < 1 - a_n^3 \text{ și } 1 - a_n < a_{n+1}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((1 - a_n))^3 < a_{n+1}^3 < 1 - a_n^3\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((1 - a_n)^3 < 1 - a_n^3,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3a_n + 3a_n^2 - a_n^3 < 1 - a_n^3,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3a_n(a_n - 1) < 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow ((a_n < 0 \text{ și}$$

$$a_n - 1 > 0) \vee (a_n > 0 \text{ și } a_n - 1 < 0),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((a_n < 0 \text{ și } a_n > 1) \vee (a_n > 0 \text{ și } a_n < 1),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_n \in (0, 1),\ (\forall) n \in \mathbb{N})$$

adică șirul este mărginit.

Monotonia. Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci $(\exists)\ k(n) \in \mathbb{N}$ astfel încît:

$$a_{n+1}^{2k(n)+1} < a_n^{2k(n)+1}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1}^{2k(n)+1} - a_n^{2k(n)+1} < 0$$

adică echivalent cu:

$$(a_{n+1} - a_n) \cdot \sum_{i=0}^{2k(n)} a_{n+1}^{2k(n)-i}\, a_n^i < 0.$$

Dar $a_n \in (0, 1)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ și deci:

$$\sum_{i=0}^{2k(n)} a_{n+1}^{2k(n)-i} a_n^i > 0,$$

iar inegalitatea precedentă ne dă:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$a_{n+1} < a_n,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Cum n a fost arbitrar rezultă că $(\forall) n \in \mathbf{N}$ atunci $a_{n+1} < a_n$, adică șirul este strict descrescător.

Cu aceasta problema este rezolvată.

3.52*. *Se consideră șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *a.î.:*

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\ u_{n+1} = u_n\,(u_{n-1}^2 - 2) - u_1,\ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că:

$$[u_n]_* = 2^{\frac{2^n + (-1)^n}{3}},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

unde $[x]_*$ *este partea întreagă a lui* $x \in \mathbf{R}$.

(Olimpiada Internațională de Matematică, 1976)

Soluție. Se pun două probleme în ceea ce privește enunțul.

a°). *Unicitatea.* Dacă există un șir cu proprietatea din enunț atunci acesta este unic.

Într-adevăr, să presupunem că n-ar fi unic; atunci există un șir $(v_n)_{n\geq 0}$ cu proprietățile din enunț astfel încît

$$(u_n)_{n\geq 0} \neq (v_n)_{n\geq 0}$$

ceea ce este echivalent cu $(\exists) m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $u_m \neq v_m$.

Avem $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$ și atunci presupunînd că $u_n = v_n$, $(\forall) n \leqslant k$ din relația de recurență obținem:

$$u_{k+1} - v_{k+1} = u_n\, u_{k-1}^2 - 2u_k - u_1 - v_k\, v_{k-1}^2 + 2v_k + v_1 = 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u_{k+1} = v_{k+1}.$$

Deci $(\forall) n \in \mathbf{N}$ atunci $u_n = v_n$ și prin urmare presupunerea că $(u_n)_{n\geq 0} \neq (v_n)_{n\geq 0}$ este absurdă.

b°). *Existența unui șir care verifică relația de recurență din enunț.*

Folosindu-ne de unicitatea șirului din enunț vom demonstra existența sa impunînd anumite condiții.

Să încercăm să determinăm un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încît:

$$u_n = x_n + \frac{1}{x_n}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Relația de recurență devine:

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} = x_n x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_n x_{n-1}^2} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right) - \frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Impunem șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ condiția

$$x_0 = 1, \ x_1 = 2, \ x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și atunci din (1) obținem că:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 5/2, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Concluzia este că dacă vom construi șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu condițiile impuse atunci șirul:

$$u_n = x_n + \frac{1}{x_n}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}$$

va satisface relația de recurență din enunț.

Pentru a calcula pe $(x_n)_{n\geq 0}$ vom determina un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ astfel încît:

$$x_n = 2^{a_n}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Deci $a_0 = 0$ $a_1 = 1$, iar din $x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2$ rezultă că

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Ecuația caracteristică a șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ este:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

și are soluțiile $t_1 = 2$, $t_2 = -1$.

Deci:

$$a_n = A2^n + B(-1)^n,$$

iar condițiile inițiale ne dau $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ și prin urmare:

$$a_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1}).$$

Din relația de recurență a lui $(a_n)_{n\geq 0}$ rezultă că $a_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ și prin urmare

$$x_n = 2^{a_n} > 2, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci:

$$[u_n]_* = \left[x_n + \frac{1}{x_n}\right]_* = x_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

adică:

$$[u_n]_* = 2^{a_n} = 2^{\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

3.53*. *În mulțimea matricilor pătratice de ordinul doi cu elemente numere reale se consideră șirurile* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definite astfel:*

$$X_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}, \ X_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}, \ X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N},$$

$$Y_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}, \ Y_1 = \begin{Vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}; \ Y_{n+2} = 2Y_{n+1} + 3Y_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *atunci* $X_m \neq Y_n$.

(D. M. Bătinețu)

Soluție. Dacă ținem seama că:

$$X_n = \begin{Vmatrix} u_n & v_n \\ w_n & t_n \end{Vmatrix}, \ Y_n = \begin{Vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{Vmatrix}; \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

atunci relația de recurență dintre matrici se transpune în relația de recurență dintre șirurile elementelor lor.

Prin urmare:

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}$$

$$a_0 = 1, \ a_1 = 7, \ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, \ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Ţinînd seama că două matrici sînt diferite dacă ele diferă prin cel puţin un element, rezolvarea problemei se reduce la a demonstra că $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\} \Rightarrow u_m \neq a_n$.

Pentru orice $n \geqslant 2$ să notăm cu α_n restul împărţirii la 8 a lui u_n, iar cu β_n restul împărţirii la 8 a lui a_n.

Se obţin în acest mod şirurile de numere naturale $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ şi vom demonstra prin inducţie că:

$$\alpha_{2k} = 3,\ \alpha_{2k+1} = 5,\ \beta_{2k} = 1,\ \beta_{2k+1} = 7,\ (\forall) k \in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

$k = 1 \Rightarrow u_2 = 1 + 2 = 3$ adică $\alpha_2 = 3$,

$a_2 = 14 + 3 = 17$ adică $\beta_2 = 1$,

$u_3 = 3 + 2 = 5$ adică $\alpha_3 = 5$,

$a_3 = 34 + 21 = 55$ adică $\beta_3 = 7$.

Presupunem că pentru $k = p$ avem:

$$\begin{cases} \alpha_{2p} = 3, & \alpha_{2p+1} = 5 \\ \beta_{2p} = 1, & \beta_{2p+1} = 7 \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\begin{cases} u_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 3, & u_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 5 \\ a_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 1, & a_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 7. \end{cases}$$

Să demonstrăm că şi pentru $k = p + 1$ afirmaţia (1) este adevărată adică:

$$\alpha_{2p+2} = 3,\ \alpha_{2p+3} = 5,\ \beta_{2p+2} = 1,\ \beta_{2p+3} = 7,$$

Într-adevăr:

$$u_{2p+2} = u_{2p+1} + 2u_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 5 + 2(\mathcal{M}\,8 + 3) =$$
$$= \mathcal{M}\,8 + 3 \Rightarrow \alpha_{2p+2} = 3.$$

$$u_{2p+3} = u_{2p+2} + 2u_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 3 + 2(\mathcal{M}\,8 + 5) =$$
$$= \mathcal{M}\,8 + 5 \Rightarrow \alpha_{2p+3} = 5.$$

$$a_{2p+2} = 2a_{2p+1} + 3a_{2p} = (\mathcal{M}\,8 + 7) + 3(\mathcal{M}\,8 + 1) =$$
$$= \mathcal{M}\,8 + 1 \Rightarrow \beta_{2p+2} = 1,$$

$$a_{2p+3} = 2a_{2p+2} + 3a_{2p+1} = 2(\mathcal{M}\,8 + 1) + 3(\mathcal{M}\,8 + 7) =$$
$$= \mathcal{M}\,8 + 7 \Rightarrow \beta_{2p+3} = 7.$$

Prin urmare, afirmația (1) este adevărată $(\forall)k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă ar exista $m,\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ astfel încît $u_m = a_n$ atunci ar însemna că $\alpha_m = \beta_n$ ceea ce este contradictorie cu afirmația (1). Deci $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ atunci $u_m \neq a_n \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ atunci $X_m \neq Y_n$.

3.54. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *astfel încît* $(\exists)\alpha \in (0, 1)$ *cu proprietatea că :*

$$(\forall)x', x'' \in \mathbf{R} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \alpha |x' - x''|.$$

Fie $x^* \in \mathbf{R}$ *cu ajutorul căruia construim șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *unde:*

$$x_0 = x^*,\ x_{n+1} = f(x_n),\ (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că $(\forall)k \in \mathbf{N}^*$ *avem* $|x_{k+1} - x_k| \leqslant$ $\leqslant \alpha^k |x^* - f(x^*)|$. *Utilizînd acest rezultat demonstrați că* $(\forall)n,\ p \in \mathbf{N}^*$ *atunci:*

$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x^* - f(x^*)|.$$

Utilizînd ultima inegalitate demonstrați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *este fundamental.*

Soluție. Avem:

$$|x_1 - x_2| = |f(x^*) - f(x_1)| \leqslant \alpha |x^* - x_1| = \alpha |x^* - f(x^*)|$$

deci pentru $k = 1$ afirmația este adevărată.

Presupunem că pentru $k = s$ avem:

$$|x_{s+1} - x_s| \leqslant \alpha^s |x^* - f(x^*)|; \qquad (1)$$

și să demonstrăm că și pentru $k = s + 1$ avem:

$$|x_{s+2} - x_{s+1}| \leqslant \alpha^{s+1} |x^* - f(x^*)|.$$

Într-adevăr:

$$|x_{s+2} - x_{s+1}| = |f(x_{s+1}) - f(x_s)| \leqslant \alpha |x_{s+1} - x_s|$$

și dacă ținem seama de (1) obținem:

$$|x_{s+2} - x_{s+1}| \leqslant \alpha^{s+1} |x^* - f(x^*)|$$

ceea ce demonstrează că $(\forall)k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant \alpha^k |x^* - f(x^*)|.$$

Avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots +$$
$$+ x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots +$$
$$+ |x_{n+1} - x_n| \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \dots + \alpha^n)|x^* - f(x^*)| =$$
$$= \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-1})\,|x^* - f(x^*)| =$$
$$= \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}\cdot|x^* - f(x^*)| < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x^* - f(x^*)|.$$

Deoarece $\alpha \in (0, 1)$ atunci notînd

$$u_n = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\cdot|x^* - f(x^*)|$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ *astfel* încît $(\forall)\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

Prin urmare, $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)\ n, p \in \mathbf{N}^*,\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este șir CAUCHY.

3.55. *Se definește șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde* $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ și:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Să se studieze convergența șirului.

Soluție. Avem:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și $x_1 = 1,\ x_2 = 2 \Leftrightarrow x_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Logaritmînd în baza 2 relația de recurență obținem:

$$2\log_2 x_{n+1} = \log_2 x_n + \log_2 x_{n-1},\ n \geqslant 2,$$

și deci dacă notăm $y_n = \log_2 x_n$, obținem că:

$$2y_{n+1} = y_n + y_{n-1},\ (\forall)\ n \geqslant 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Se verifică prin inducție completă că:

$$y_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-2}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 2/3$ atunci şirul $x_n = 2^{y_n}$ este convergent şi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$$

3.56*. *Se dă funcţia* $f:[0, 1]\to[0, 1]$ prin $f(x) = \frac{(x+a)(x+b)}{x^2+a}$ *unde* $a \in \mathbf{R}_+^*$ *este fixat şi* $b \in \mathbf{R}$. *Se consideră şirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit astfel :* $a_0 \in [0, 1]$,

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că şirul dat este convergent şi să se calculeze, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(Maria Giurgiu)

Soluţie. Este evident că $f(0), f(1) \in [0, 1] \Leftrightarrow b \in [0, 1]$, $1 + b \in [0, 1] \Leftrightarrow b \in [0, 1]$, $b \in [-1, 0] \Leftrightarrow b = 0$.

Prin urmare:

$$f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2+a}$$

şi atunci:

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+a)}{a_n^2+a}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

deci:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n+a}{a_n^2+a}; \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_n = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $a_0 \in (0, 1]$ atunci din relaţia (2) rezultă că $a_{n+1} > a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ adică şirul este strict crescător.

Fiind şi mărginit ($a_n \in [0, 1]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$) rezultă că este convergent, adică există $y \in [0, 1]$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = y$.

Trecînd la limită în (1) obţinem:

$$y = \frac{y(y+a)}{y^2+a}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y^3 + ay = y^2 + ay$$

și deci $y^3 = y^2 \Rightarrow y = 0$ sau $y = 1$. Deoarece șirul este strict crescător și $a_0 \geq 0$ rezultă că $y \neq 0$, deci $y = 1$.

3.57. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de numere reale.*

a°). *Dacă:*

$$x_{n+1}^2 < x_n^2,\ x_n^2 < a^2,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

cu $a \geq 2$, *rezultă că șirul* $(x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent?*

b°). *Dacă șirul* $(x_n^{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent rezultă că șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent?*

c°). *Dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 0$$

rezultă că șirul $(x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent?*

Soluție. a°). Răspunsul este negativ. *Contraexemplu.* Dacă

$$x_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{|a|}{2} + \frac{1}{n+1}\right)$$

atunci șirul îndeplinește condițiile enunțului dar nu este convergent deoarece $x_{2k} \to \frac{|a|}{2}$, $x_{2k+1} \to \frac{-|a|}{2}$ și cum $|a| > 0$ rezultă că șirul nu poate fi convergent.

b°). Răspunsul este negativ. *Contraexemplu.* Fie $x_{2k} = 1$, $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$ și deci notînd $y_n = (x_n^{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ rezultă că $y_{2k} = 1$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$ și $\ln y_{2k+1} = \frac{-\ln(2k+1)}{2k+1} \to 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y_{2k+1} \to 1$ și deci $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pe cînd șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge.

c°). Răspunsul este tot negativ. *Contraexemplu.* Dacă $x_n = (-1)^{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ acest șir este periodic de perioadă $T = 1$ și deci nu este convergent pe cînd:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n = 2k \\ \frac{1}{n} \text{ dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$

și evident:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 0.$$

3.58*. *Se consideră șirurile de numere naturale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *definite astfel:*

$$a_0 = a_1 = e,\ a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

$$b_0 = e,\ b_1 = e^7,\ b_{n+1} = b_n^2 b_{n-1}^3,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se demonstreze că oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$, $a_m \neq b_n$.

(Maria Giurgiu)

Soluție. Din modul cum au fost definite șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă că $a_n, b_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și deci au sens

$$x_n = \ln a_n,\ y_n = \ln b_n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Relațiile de recurență prin care se definesc șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt echivalente cu:

$$x_0 = x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*;$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = 7,\ y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

de unde rezultă că $x_n, y_n \in \mathbf{N}^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Pentru orice $n \geqslant 2$ să notăm cu α_n restul împărțirii lui x_n la 8, iar cu β_n restul împărțirii lui y_n la 8.

Se obțin în acest mod șirurile $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ și vom demonstra prin inducție matematică următoarele:

$$\alpha_{2k} = 3,\ \alpha_{2k+1} = 5,\ \beta_{2k} = 1,\ \beta_{2k+1} = 7,\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

Într-adevăr:

$k = 1 \Rightarrow$: $x_2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = 3$;

$y_2 = 14 + 3 = 17 \Rightarrow \beta_2 = 1$;

$x_3 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \alpha_3 = 5$,

$y_3 = 34 + 21 = 55 \Rightarrow \beta_3 = 7$.

Să presupunem că pentru $k = p$ avem:

$$\begin{cases} \alpha_{2p} = 3, & \alpha_{2p+1} = 5 \\ \beta_{2p} = 1, & \beta_{2p+1} = 7 \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\begin{cases} x_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 3, & x_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 5 \\ y_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 1, & y_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 7. \end{cases}$$

Să demonstrăm că și pentru $k = p + 1$ afirmația (1) este adevărată, adică:

$$\alpha_{2p+2} = 3, \quad \alpha_{2p+3} = 5$$

$$\beta_{2p+2} = 1, \quad \beta_{2p+3} = 7.$$

Într-adevăr:

$$x_{2p+2} = x_{2p+1} + 2x_{2p} = \mathcal{M}\,8 + 5 + 2(\mathcal{M}\,8 + 3) =$$

$$= \mathcal{M}\,8 + 5 + 6 = \mathcal{M}\,8 + 3 \Rightarrow \alpha_{2p+2} = 3.$$

$$x_{2p+3} = x_{2p+2} + 2x_{2p+1} = \mathcal{M}\,8 + 3 + 2(\mathcal{M}\,8 + 5) =$$

$$\mathcal{M}\,8 + 3 + 10 = \mathcal{M}\,8 + 5 \Rightarrow \alpha_{2p+3} = 5.$$

$$y_{2p+2} = 2y_{2p+1} + 3y_{2p} = 2(\mathcal{M}\,8 + 7) + 3(\mathcal{M}\,8 + 1) =$$

$$= \mathcal{M}\,8 + 14 + 3 = \mathcal{M}\,8 + 1 \Rightarrow \beta_{2p+2} = 1.$$

$$y_{2p+3} = 2y_{2p+2} + 3y_{2p+1} = 2(\mathcal{M}\,8 + 1) + 3(\mathcal{M}\,8 + 7) =$$

$$= \mathcal{M}\,8 + 2 + 21 = \mathcal{M}\,8 + 7 \Rightarrow \beta_{2p+3} = 7.$$

Deci afirmația (1) este adevărată $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă ar exista $m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ astfel încît $a_m = b_n$ atunci înseamnă că $x_n = y_n$ ceea ce implică $\alpha_m = \beta_n$.

Dar $\alpha_m = \beta_n$ este în contradicție cu afirmația (1), oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Deci, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ atunci $a_m \neq b_n$ și cum pentru $n = 1$ avem $a_1 \neq b_1$ rezultă că $(\forall), m, n \in \mathbf{N}^*$ atunci $a_m \neq b_n$.

3.59*. *Se consideră șirurile* $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$ *și* $\alpha_n + \beta_n = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definit prin relația de recurență*

$$x_0 = b,\ x_n = \alpha_n a + \beta_n x_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*\ a \leqslant b$$

este convergent. Să se arate că dacă șirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este crescător atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Demonstrăm prin inducție că propozițiile $p(n) : x_n \geqslant a$ sînt adevărate $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. $v(p(0)) = 1$.

Într-adevăr, $x_0 = b \geqslant a$. De asemenea: $v(p(1)) = 1$.

Într-adevăr:

$$x_1 = a\alpha_1 + \beta_1 x_0 = x_1 - a = a(\alpha_1 - 1) + \beta_1 x_0 =$$
$$= -a\beta_1 + \beta_1 x_0 = \beta_1(x_0 - a) \geqslant 0 \Leftrightarrow x_1 \geqslant a.$$

Presupunem că pentru orice $n \leqslant k$ avem:

$$v(p(n)) = 1 \Leftrightarrow x_n \geqslant a,\ (\forall) n \leqslant k.$$

Să demonstrăm că:

$$v(p(k+1)) = 1 \Leftrightarrow x_{k+1} \geqslant a.$$

Într-adevăr:

$$v(p(k)) = 1 \Leftrightarrow x_k \geqslant a,$$

iar relația de recurență ne dă:

$$x_{k+1} = a\,\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}\,x_k$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_{k+1} - a = a(\alpha_{k+1} - 1) + \beta_{k+1}\,x_k =$$
$$= -a\,\beta_{k+1} + \beta_{k+1}\,x_k = \beta_{k+1}\,(x_k - a) \geqslant 0.$$

Deci: $x_n \geqslant a$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. De asemenea:

$$x_{n+1} - x_n = \alpha_{n+1} a + \beta_{n+1} x_n - x_n = x_{n+1} a + x_n (\beta_{n+1} - 1) =$$

$$= a\,\alpha_{n+1} - \alpha_{n+1} x_n = \alpha_{n+1}(a - x_n) \leqslant 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton descrescător şi deoarece $a \leqslant x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ rezultă că este şi mărginit. Fiind monoton şi mărginit rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ adică $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$.

Şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fiind crescător rezultă că şirul $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este descrescător şi deoarece ambele sînt şi mărginite rezultă că sînt convergente adică $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta < 1$.

Trecînd la limită în relaţia de recurenţă obţinem

$$x = \alpha a + \beta x \Leftrightarrow x(1 - \beta) = \alpha a \Leftrightarrow \alpha x = \alpha a \Leftrightarrow x = a.$$

3.60. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un şir* $\mathbf{m}$*-staţionar de numere reale cu proprietatea că există* $m \in \mathbf{N}^*$, $m > 12$ *astfel încît* $x_n = 0$, $(\forall) n \geqslant m$. *Dacă şirul are proprietatea că pînă la* m *exclusiv suma oricăror şapte termeni consecutivi este strict negativă iar suma oricăror unsprezece termeni consecutivi este strict pozitivă să se determine cel mai mare număr* m *din enunţ. Să se dea un exemplu de şir cu această proprietate.*

(Olimpiada Internaţională de Matematică, 1977, Belgrad).

Soluţie. Şirul dat este:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, \ldots, x_{m-1}, x_m = 0, 0, 0, 0, \ldots.$$

Deoarece suma oricăror unsprezece termeni consecutivi este strict pozitivă, iar suma oricăror şapte termeni consecutivi este strict negativă rezultă că suma oricăror patru termeni consecutivi este strict pozitivă.

Deoarece suma oricăror şapte termeni consecutivi este strict negativă, iar suma oricăror patru termeni consecutivi este strict pozitivă rezultă că suma oricăror trei termeni consecutivi este strict negativă.

Prin urmare:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} +$$

$$+ x_{11} > 0,\ x_{12} + x_{13} + x_{14} < 0,\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} > 0$$

și atunci rezultă $x_{15} > 0$. Din faptul că:

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} < 0 \text{ și } x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} > 0$$

rezultă $x_{16} > 0$. De asemenea din:

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} < 0$$

$$\text{și } x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} > 0$$

rezultă $x_{17} > 0$. Prin urmare:

$$x_{15} + x_{16} + x_{17} > 0$$

ceea ce contrazice faptul că suma oricăror trei termeni consecutivi este negativă. Deci $m \leqslant 17$. Vom da un exemplu din care va rezulta că $m = 17$. Într-adevăr, șirul

5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5, −13, 5, 5, 5, −13, 5, 5,

0, 0, 0,...

satisface enunțul și deci $m = 17$.

3.61. *Se consideră șirul de numere întregi* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *a.î.*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și cu ajutorul său se construiește șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu*

$$x_1 = 1 - a_1,\ x_2 = -(1 + a_2) \text{ și } x_n + 2a_n =$$

$$= -(x_{n-1} + 2x_{n-2} + a_{n-2}),\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}.$$

Dacă se construiește șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*-\{1\}}$ *cu*

$$y_n = 2^{n+1} - 7(x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}\,a_{n-1} + a_{n-1}^2),\ (\forall)\,n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

atunci acesta este format numai din pătrate de numere naturale nenule.

(D.M. Bătinețu)

Soluție. Deoarece $a_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ atunci $x_1,\ x_2 \in \mathbf{Z}$ și deci $x_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow y_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Să notăm $u_n = x_n + a_n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ și deci $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ iar din relația dată în enunț rezultă că:

$$u_n = -(u_{n-1} + 2u_{n-2}),\ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}.$$

Prin urmare:

$$y_n = 2^{n+1} - 7(x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}a_{n-1} + a_{n-1}^2) =$$
$$= 2^{n+1} - 7(x_{n-1} + a_{n-1}) = 2^{n+1} - 7u_{n-1}^2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Din relația de recurență a lui $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și din condițiile inițiale $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ obținem

$$u_3 = -1, \ u_4 = 3, \ u_5 = -1, \ u_6 = -5, \ u_7 = 7, \ u_8 = 3.$$

Deci:

$$y_2 = 1, \ y_3 = 9, \ y_4 = 25, \ y_5 = 1,$$
$$y_6 = 121, \ y_7 = 81, \ y_8 = 169, \ y_9 = 961$$

ceea ce ne arată că $y_2, y_3, \ldots, y_9$ sînt pătrate perfecte.

Să mai observăm că:

$$y_2 = (2u_2 + u_1)^2, \ \ldots, \ y_9 = (2u_9 + u_8)^2.$$

Să presupunem că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant k$ avem:

$$y_n = (2u_n + u_{n-1})^2$$

și să demonstrăm că și pentru $n = k + 1$ avem:

$$y_{k+1} = (2u_{k+1} + u_k)^2.$$

Într-adevăr:

$$2y_k = 2(2u_k + u_{k-1})^2 = 8u_k^2 + 8u_k u_{k-1} + 2u_k^2,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2^{k+2} - 14u_{k-1}^2 = 8u_k^2 + 8u_k u_{k-1} + 2u_{k-1}^2$$

adică echivalent cu:

$$2^{k+2} = 8u_k^2 + 8u_k u_{k-1} + 16u_{k-1}^2.$$

Ținînd seama că:

$$u_{k-1} = -\frac{1}{2}\left(u_{k+1} + u_k\right)$$

ultima relație devine:

$$2^{k+2} = 8u_k^2 - 4u_k(u_{k+1} + u_k) + 4(u_{k+1} + u_k)^2 =$$
$$= 8u_k^2 + 4u_k u_{k+1} + 4u_{k+1}^2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2^{k+2} - 7u_k^2 = (2u_{k+1} + u_k)^2$$

adică echivalent cu:

$$y_{k+1} = (2u_{k+1} + u_k)^2.$$

Deci conform concluziei principiului inducției complete:

$$y_n = (2u_n + u_{n-1})^2, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

adică y_n este pătrat perfect, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

3.62. *Fie* p_n *cel de al* n*-lea număr prim din șirul numerelor naturale* ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...) *și fie* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k!}.$$

Să se arate că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$.

Soluție. Avem:

$$x_{n+k} = x_k + \frac{p_{k+1}}{(k+1)!} + \frac{p_{k+2}}{(k+2)!} + \ldots + \frac{p_{n+k}}{(n+k)!}$$

și dacă ținem seama de teorema lui CEBÎȘEV[1], *„oricare ar fi* $m \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ *atunci între* m *și* $2m$ *se află cel puțin un număr prim"*, obținem că:

$$p_k < p_{k+1} < 2p_k, \ (\forall)k \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă că:

$$x_{n+k} < x_k + \frac{p_{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2p_{k+1}}{(k+2)!} + \ldots + \frac{2^{n-1}p_{k+1}}{(n+k)!} =$$

$$= x_k + p_{k+1}\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{2}{(k+2)!} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(n+k)!}\right) <$$

$$< x_k + \frac{p_{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{2}{k+2} + \frac{2^2}{(k+2)^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(k+2)^{n-1}}\right) =$$

$$= x_k + \frac{p_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{k+2}\right)^n}{1 - \frac{2}{k+2}}$$

$$= x_k + \frac{p_{k+1}}{(k+1)!k}\left(1 - \left(\frac{2}{k+2}\right)^n\right) \cdot (k+2)$$

[1] Cebîșev, Pafnuti Lvovici (1821–1894) — matematician rus.

De unde tragem concluzia că:

$$x_n < x_1 + \frac{3p_2}{2!}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

adică şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit superior. Deoarece şirul dat este şi strict crescător rezultă că este convergent adică $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$.

3.63. *Fie* $x_1, r \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu*

$$x_n = x_1 + (n-1)r, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un şir astfel încît:*

$$y_n = \prod_{i=1}^{n} x_i, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

să se calculeze

$$y = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}\right).$$

(D.M. Bătineţu)

Soluţie. Vom folosi teorema:

(*T*): *„dacă* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ***este un şir de numere reale strict pozitive şi dacă***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0, \ \textit{atunci} \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a".$$

Dacă în (*T*) punem $a_n = \frac{x_{n+1}^n}{y_n}$ atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_{n+2}^{n+1}}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_n}{x_{n+1}^n} = \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{r}{x_{n+1}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\left(1 + \frac{r}{x_{n+1}}\right)^{\frac{x_{n+1}}{r}}\right)^{\frac{r(n+1)}{x_{n+1}}},$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

şi prin urmare, avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}} = e.$ (1)

Dacă în (T) punem $a_n = \frac{x_n^n}{y_n}$ atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_{n+1}^{n+1}}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_n}{x_n^n} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{r}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{r}}\right)^{\frac{rn}{x_n}},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ și atunci obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}} = e.$ **(2)**

Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{y_{n+1}^n}{y_n^{n+1}}} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{y_{n+1}^n}{y_n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{\frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{\sqrt[n]{y_n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \overset{(1)}{=} e. \quad \textbf{(3)}$$

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = e^{-1} \cdot e \cdot 1 = 1, \quad \textbf{(4)}$$

și prin urmare:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n}} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}}{\sqrt[n]{y_n}} \right)^{\frac{\sqrt[n]{y_n}}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}}} \right)^{\left(\sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}\right) \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{y_n}}} =$$

$$e^{y \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}} \cdot \frac{n}{x_n}} = e^{ey \cdot \frac{1}{r}}.$$

De aici rezultă $e = e^{ey \cdot \frac{1}{r}} \Leftrightarrow 1 = ey \cdot \frac{1}{r} \Leftrightarrow y = re^{-1}.$

3.64. *Fie* $x_1, r \in \mathbf{R}_+^*$ *și* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu*

$$x_n = x_1 + (n-1)r, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Cu ajutorul acestui șir construim șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *unde*

$$y_n = \prod_{i=1}^{n} x_i, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+k]{y_{n+k}} - \sqrt[n+m]{y_{n+m}}\right)$$

unde $k, m \in \mathbf{N}$, $k > m$ *și* $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

(Ilie Iliescu)

Soluție. După cum am arătat în problema **3.63.** avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{y_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n}\right) = re^{-1}$$

și atunci rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+k]{y_{n+k}} - \sqrt[n+m]{y_{n+m}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k-m-1} \left(\sqrt[n+m+j+1]{y_{n+m+j+1}} - \sqrt[n+m+j]{y_{n+m+j}}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-m-1} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+m+j+1]{y_{n+m+j+1}} - \sqrt[n+m+j]{y_{n+m+j}}\right) =$$

$$= (k-m)re^{-1}.$$

3.65. *Fie* $r(m)$ *numărul soluțiilor în numere întregi ale ecuației* $x^2 + y^2 = m$, *iar*

$$R(m) = \sum_{m=0}^{n} r(m)$$

unde $m, n \in \mathbf{N}$ (*două soluții care diferă numai prin semn le considerăm distincte și mai considerăm* $r(0) = 1$). *Să se arate că șirul* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu:*

$$a_n = \frac{R(n)}{n}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

este convergent și că $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$.

(N.N. Burcea)

Soluție. Fie xOy un sistem (reper) cartezian ortogonal de coordonate în plan. Ducem la axele xx' și yy' paralele echidistante, cu distanța dintre ele egală cu unitatea, care acoperă tot planul xOy. Fie P mulțimea pătratelor care se formează prin acest caroiaj și fie $p \in P$ un pătrat oarecare, iar M_p vîrful pătratului p de abscisă și ordonată maximă dintre toate vîrfurile pătratului p. Dacă definim funcția $f: P \to \{M_p \mid p \in P\}$ prin $f(p) = M_p$ atunci obținem o bijecție între cele două mulțimi.

Mulțimea $\{M_p \mid p \in P\}$ reprezintă, după cum se vede, mulțimea tuturor punctelor din plan cu coordonate întregi.

De aici rezultă că suma ariilor unui anumit număr de pătrate $p \in P$, reprezintă numărul punctelor cu coordonate întregi ce se află în porțiunea de plan acoperită de pătratele p alese.

Considerînd cercul de rază $r = \sqrt{n}$ și de centru $O(0, 0)$, atunci toate pătratele care apar în expresia lui $R(n)$ se află în interiorul cercului:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{n} + \sqrt{2})^2.$$

Deci, $R(n) < \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2$. De asemenea, pătratele care apar în $R(n)$ acoperă complet cercul de rază $|\sqrt{n} - \sqrt{2}|$, și deci

$$R(n) > \pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2, \ (\forall) n \geq 2.$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$\pi(n - 2\sqrt{2n} + 2) < R(n) < \pi(n + 2\sqrt{2n} + 2)$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\pi\left(1 - \frac{2\sqrt{2n}}{n} + \frac{2}{n}\right) < \frac{R(n)}{n} < \pi\left(1 + \frac{2\sqrt{2n}}{n} + \frac{2}{n}\right),$$

de unde prin trecere la limită obținem limita din enunț.

CAPITOLUL 4

TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ ALE ELEVILOR

4.1. Teorema lui Toeplitz

Această teoremă stabilește o legătură între șirurile triunghiulare de numere reale și între șirurile simple de numere reale. Un studiu asupra șirurilor duble a fost întreprins pentru prima oară, în mod sistematic, de către L. PRINGSHEIM[1]. Printre matematicienii români cu contribuții valoroase în teoria șirurilor duble se remarcă MIRON NICOLESCU[2] și EUGEN DOBRESCU[3]. Aceștia au adus contribuții importante mai ales în ceea ce privește proprietățile hiperbolice ale șirurilor duble.

Teorema 4.1.1. *Fie* $(t_{nm})_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ *un șir de numere reale inferior triunghiular, iar* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir simplu de numere reale. Dacă:*

a). *Orice șir coloană din șirul* $(t_{nm})_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ *este convergent la zero* $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} t_{nm} = 0$, $(\forall)m \in \mathbf{N}$, *fixat*;

aa). $(\exists)K \in \mathbf{R}_+^*$, *astfel încît:*

$$\sum_{i=0}^{n} |t_{ni}| \leqslant K, \quad (\forall)n \in \mathbf{N};$$

aaa). $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$,

atunci $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *unde șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *are termenul general*

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} t_{n,i}\, x_i.$$

[1] Pringsheim, Ludwig (1875—1953) — matematician german.
[2] Nicolescu Miron, (1903—1975) — matematician român.
[3] Dobrescu, Eugen (n. 1923) — matematician român.

Demonstrație. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ rezultă că $(\forall)\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît $(\forall)n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon$ avem $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$ și deci pentru orice $n > n$ avem:

$$|u_n| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n_\varepsilon} t_{ni}x_i\right| + \sum_{j=n_\varepsilon+1}^{n} |t_{nj}x_j| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n_\varepsilon} t_{ni}x_i\right| +$$

$$+ \left(\sum_{j=n_\varepsilon+1}^{n} |t_{nj}|\right)\frac{\varepsilon}{2K} \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n_\varepsilon} t_{ni}x_i\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Deoarece pentru orice $m \in \mathbf{N}$, m fixat $\lim_{n\to\infty} t_{nm} = 0$, rezultă că pentru $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ considerat mai sus $(\exists)k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n > k_\varepsilon$ avem:

$$|t_{nm}| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |x_1| + \ldots + |x_{n_\varepsilon}|)}$$

și deci pentru orice $n > n_\varepsilon + k_\varepsilon - 1$ avem:

$$\left|\sum_{i=0}^{n_\varepsilon} t_{ni}x_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} |t_{ni}|\cdot|x_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |x_1| + \ldots + |x_{n_\varepsilon}|)} \cdot$$

$$\cdot (|x_0| + |x_1| + \ldots + |x_{n_\varepsilon}|) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din relația (1) obținem că pentru orice $n > n_\varepsilon + k_\varepsilon - 1$ avem $|u_n| < \varepsilon$ ceea ce este echivalent cu $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ și teorema este demonstrată.

Teorema 4.1.2. *Fie* $(t_{nm})_{(n,\,m)\in\mathbf{N}^2}$ *un șir de numere reale inferior triunghiular și* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir simplu de numere reale. Dacă:*

b°). *Orice șir coloană din șirul* $(t_{nm})_{(n,\,m)\in\mathbf{N}^2}$ *este convergent la zero* $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} t_{nm} = 0$, $(\forall)m \in \mathbf{N}$, m *fixat;*

bb°). $(\exists)K \in \mathbf{R}_+^*$ *astfel încît*

$$\sum_{i=0}^{n} |t_{ni}| \leqslant K, \ (\forall)n \in \mathbf{N};$$

bbb°) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$,

bbbb°) $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$, *unde șirul* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *are termenul general:*

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} t_{ni},$$

atunci $\lim_{n\to\infty} u_n = x$ *unde șirul* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *are termenul general*

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} t_{ni} x_i.$$

Demonstrație. Este evident că

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} t_{ni}(x_i - x) + x v_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Aplicînd teorema 4.1.1 șirului $(x_n - x)_{n\in\mathbf{N}}$ și folosind condiția bbbb°) rezultă afirmația din enunț.

Corolarul 4.1.1. Dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ punem $t_{ni} = \frac{1}{n}$. $0 \leqslant i \leqslant n$ atunci din teorema 4.1.2. obținem că dacă un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are proprietatea că $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n} = x,$$

iar aceasta este o teoremă care a fost demonstrată de matematicianul francez CAUCHY.

Corolarul 4.1.2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale, iar $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit. Dacă există:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbf{R},$$

atunci și șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$$

(Teorema CESARO-STOLZ). Într-adevăr, dacă în teorema 4.1.2. considerăm $t_{nm} = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$, atunci se verifică cu ușurință îndeplinirea condițiilor din enunțul teoremei și deci conform concluziei teoremei rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} \cdot t_{nm} = a.$$

Aplicația 4.1.1. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt două șiruri de numere reale astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ și $(\exists)K \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît:

$$\sum_{i=0}^{n} |y_i| \leqslant K, \quad (\forall)n \in \mathbf{N},$$

atunci:

$$\lim_{n\to\infty} (x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0) = 0.$$

Indicație. În teorema 4.1.1 se consideră

$$t_{nm} = y_{n-m}, \quad (\forall)n, m \in \mathbf{N}.$$

Aplicația 4.1.2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt șiruri de numere reale astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim_{n\to\infty} y_n = y$; $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = xy$, unde:

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}.$$

Dacă presupunem mai întîi că $x = 0$ rezultă atunci din aplicația 4.1.1, înlocuind y_n cu $\frac{y_n}{n}$, că $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Referindu-ne însă la cazul general, transcriem pe z_n sub forma:

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i - x)\, y_{n-i} + x \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} y_i$$

și atunci primul termen din expresia lui z_n tinde la zero conform celor de mai sus, iar al doilea termen tinde la xy în conformitate cu corolarul 4.1.1.

Aplicația 4.1.3. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i x_i = x.$$

Indicație. Dacă în teorema 4.1.2 punem $t_{nm} = \frac{1}{2^n} C_n^m$ și ținem seama că $C_n^m < n^m$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{2^n} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} C_n^m = 2^n$$

rezultă că sînt îndeplinite condițiile ipotezei teoremei și deci este adevărată și concluzia.

Aplicația 4.1.4. Dacă $\lim x_n = x$ și $a \in \mathbf{R}_+^*$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i x_i = x.$$

Indicație. Aceasta este o simplă generalizare a aplicației precedente și se demonstrează în mod analog. Coeficienții se pot aranja și în ordine inversă, așa că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} x_i = x_i.$$

4.2. Asupra unor recurențe de ordinul întîi

Ne vom ocupa mai întîi de recurențele liniare de ordinul întîi de forma:

$$x_{n+1} + a_n x_n = b_n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \tag{1}$$

unde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt șiruri cunoscute de numere reale și unde $a_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Teorema 4.2.1. *Soluția generală a recurenței (1) este mulțimea șirurilor de numere reale* $\{(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}\}$ unde:

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(c + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i b_i}{\prod_{j=1}^{i} a_j}\right) \prod_{i=1}^{n-1} a_i \tag{2}$$

cu c o constantă reală arbitrară.

Demonstrație. Să găsim mai întîi soluția generală a recurenței omogene asociate:

$$x_{n+1} + a_n x_n = 0, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_{n+1} = -a\ x_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

de unde deducem:

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_{i+1} = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_i x_i$$

și prin urmare:

$$x_n = (-1)^{n-1} x_1 \prod_{i=1}^{n-1} a_i = (-1)^{n-1} d \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

unde d este o constantă reală arbitrară. Pentru a determina soluția particulară a recurenței omogene vom aplica *metoda variației constantei*. Soluția particulară este deci $(x_n^0)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu

$$x_n^0 = (-1)^{n-1} d_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i, \quad x_{n+1}^0 = (-1)^n d_{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Deci dacă înlocuim în (1) obținem:

$$(-1)^n d_{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n-1} d_n \prod_{i=1}^{n} a_i = b_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{n+1} - d_n = \frac{(-1)^n b_n}{p_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

unde am notat:

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Rezultă, deci, că:

$$d_n = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i b_i}{p_i}.$$

Prin urmare:

$$x_n^0 = (-1)^{n-1} \left(d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i b_i}{p_i} \right) p_{n-1}$$

și deci:

$$x_n = \bar{x}_n + x_n^0 = (-1)^{n-1}\left(d + d_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i b_i}{p_i}\right)p_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1}\left(c + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i b_i}{p_i}\right)p_{n-1},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*,$$

unde $c = d + d_1$ este o constantă reală arbitrară.

Definiția 4.2.1. Fiind date șirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, se numește recurență reală de tip BERNOULLI o recurență reală de ordinul întîi de forma:

$$x_{n+1} + a_n x_n = b_n x_n^\alpha,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*,\ c \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Definiția 4.2.2. Fiind date șirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, se numește recurență reală de tip RICCATI[1] o recurență reală de ordinul întîi de forma:

$$x_{n+1} = a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*. \tag{4}$$

Teorema 4.2.2. *Dacă se cunoaște o soluție particulară a recurenței* RICCATI, *atunci determinarea soluției sale generale se reduce la determinarea soluției generale a unei recurențe* BERNOULLI.

Demonstrație. Fie $(x_n^0)_{n\in\mathbf{N}^*}$ o soluție particulară a recurenței RICCATI, adică:

$$x_{n+1}^0 = a_n(x_n^0)^2 + b_n x_n^0 + c_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Notînd:

$$x_n = y_n + x_n^0,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Rezultă că:

$$y_{n+1} + x_{n+1}^0 = a_n(y_n + x_n^0)^2 +$$
$$+ b_n(y_n + x_n^0) + c_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$y_{n+1} + x_{n+1}^0 = a_n y_n^2 + (2a_n x_n^0 + b_n)\,y_n + a_n(x_n^0)^2 +$$
$$+ b_n x_n^0 + c_n$$

---

[1] Riccati, Jacopo Francesco (1676–1754) - matematician italian.

adică echivalent cu:

$$y_{n+1} + (-2a_n x_n^0 - b_n)\, y_n = a_n y_n^2, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și deci echivalent cu:

$$y_{n+1} + d_n y_n = a_n y_n^2, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

unde am notat:

$$d_n = -2a_n x_n^0 - b_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Am obținut deci o recurență BERNOULLI cu $\alpha = 2$.

Definiția 4.2.3. O recurență reală de tip RICCATI

$$x_{n+1} = a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$
$$\text{cu } a_n \in \mathbf{R}^*, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

se numește recurență reală de tip POMPEIU[1] dacă și numai dacă:

$$c_n + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} = \frac{b_n^2}{4a_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Teorema 4.2.3. *Determinarea soluției generale a unei recurențe de tip* POMPEIU *este echivalentă cu determinarea soluției generale a unei recurențe* BERNOULLI *de forma*

$$y_{n+1} = a_n y_n^2, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. După cum se observă, condiția lui POMPEIU este echivalentă cu cunoașterea unei soluții particulare a recurenței RICCATI.

Recurența RICCATI se mai scrie:

$$x_{n+1} = a_n \left(x_n + \frac{b_n}{2a_n}\right)^2 - \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} + c_n + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} - \frac{b_n^2}{2a_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce este echivalent cu:

$$x_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} = a_n \left(x_n + \frac{b_n}{2a_n}\right)^2 + c_n + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} - \frac{b_n^2}{4a_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

Dacă ținem seama de enunț și notăm:

$$y_n = x_n + \frac{b_n}{2a_n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

[1] Pompeiu, Dimitrie (1873–1954) – matematician român, creatorul derivatei areolare și distanței dintre două mulțimi.

din relația precedentă obținem:

$$y_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

și deci am obținut o recurență de tip BERNOULLI cu $c = 2$.

4.3. O generalizare a funcției parte întreagă a unui număr real

Vom da mai jos o generalizare a funcției parte întreagă a unui număr real, construind mai întîi o submulțime a mulțimii $\mathbf{R}$ care să îndeplinească același rol pe care îl îndeplinea mulțimea $\mathbf{Z}$ în cazul funcției parte întreagă a unui număr real.

Fie $r \in \mathbf{R}_+^*$ și $\mathbf{Z}_r = \{z \mid z = nr,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Mulțimea $\mathbf{Z}_r$ constituie o generalizare a mulțimii $\mathbf{Z}$ în sensul că $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}$.

Este evident că $(\forall) x \in \mathbf{R}$, $(\exists) z \in \mathbf{Z}_r$ astfel încît $z \leqslant x < z + r$ și că acest $z \in \mathbf{Z}_r$ este unic pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$.

Vom considera funcția $[\cdot]_r : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}_r$ cu proprietatea că $[x]_r = z \in \mathbf{Z}_r$ unde $z \in \mathbf{Z}_r$ este acel z care satisface condiția enunțată mai sus. Numărul $[x]_r$ îl vom numi *partea întreagă generalizată* a numărului $x \in \mathbf{R}$, iar graficul acestei funcții este cel din figura 4.3.1. Cu ajutorul funcției $[\cdot]_r$

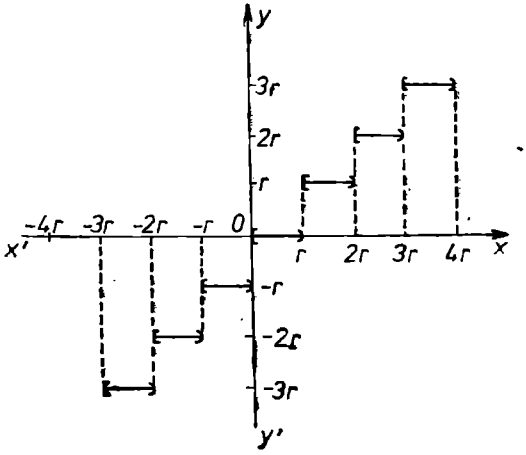

Fig. 4.3.1

vom defini funcția $\{\cdot\}_r : \mathbf{R} \to [0, r)$ unde $\{x\}_r = x - [x]_r$ este numită *partea fracționară generalizată* a numărului real x. Graficul acestei funcții este cel din figura 4.3.2.

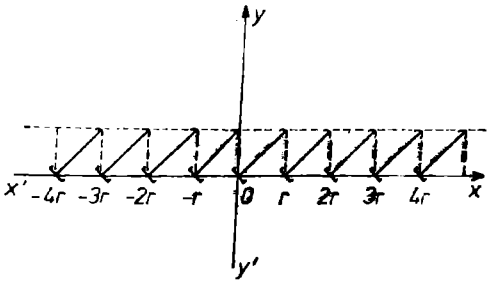

Fig. 4.3.2

Dăm mai jos unele proprietăți ale funcției parte întreagă generalizată.

Teorema 4.3.1. $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $(\forall)m \in \mathbf{N}^*$,

$$(\exists)s \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

astfel încît:

$$[mx]_r = m[x]_r + sr \qquad (1).$$

Demonstrație. Împărțim intervalul închis $[[x]_r, [x]_r + r]$ în m părți egale prin punctele de diviziune $b_i \in i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ (Fig. 4.3.3.) astfel încît:

$$[x]_r = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s < \ldots < b_m = [x]_r + r.$$

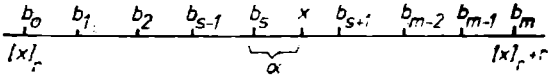

Fig. 4.3.3

Rezultă deci că:

$$x = [x]_r + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_s - b_{s-1}) + x =$$

$$= [x]_r + \sum_{j=1}^{s} (b_j - b_{j-1}) + x, \qquad (2)$$

unde $0 \leqslant \alpha < \frac{r}{m}$. Avînd în vedere că prin construcție:

$$b_j - b_{j-1} = \frac{r}{m}, \quad (\forall) j \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

relația (2) ne dă:

$$x = [x]_r + \frac{s}{m} r + \alpha. \tag{3}$$

Pe baza relației (3) obținem:

$$mx = m[x]_r + sr + m\alpha \tag{4}$$

unde, evident, $0 \leqslant m\alpha < r$.

Vom deosebi acum trei cazuri pentru demonstrarea relației (1).

a). Dacă $x \in \mathbf{R}_+$, atunci $mx \in \mathbf{R}_+$, deci:

$$[mx]_r = [m[x]_r + sr + m\alpha]_r = m[x]_r + sr.$$

Aceasta deoarece din $0 \leqslant m\alpha < r$ rezultă $[m\alpha]_r = 0$.

aa). Dacă $x \in \mathbf{R}_-$ și $\alpha = 0$ atunci:

$$x = [x]_r + \frac{s}{m} r$$

cu $s \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ și deci:

$$mx = m[x]_r + sr < 0$$

iar $mx \in \mathbf{Z}$, ceea ce ne arată că:

$$[mx]_r = mx = m[x]_r + sr.$$

aaa). Dacă $x \in \mathbf{R}_-$ și $x \neq 0$ atunci $mx < 0$, $mx \notin \mathbf{Z}$, și deci avem:

$$[mx]_r = -[|mx|]_r - r.$$

Deoarece:

$$mx = m[x]_r + sr + m\alpha$$

rezultă că:

$$|mx| = -m[x]_r - sr - m\alpha = -m[x]_r - sr - r + (r - m\alpha).$$

Deoarece, $-r > r - mx > 0$ rezultă:

$$[r - mx]_r = 0, \text{ deci } [|mx|]_r = -m[x]_r - sr - r$$

și prin urmare:

$$[mx]_r = -[|mx|]_r - r = m[x]_r + sr + r - r = m[x]_r + sr.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Teoremă 4.3.2. $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $(\forall)m, n \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)q \in \mathbf{Z}$ *cu* $|q| < max\ (m, n)$ *astfel încît:*

$$[xm]_r - [nx]_r = (m - n)\,[x]_r + qr$$

Demonstrație. Conform teoremei precedente există $s_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ respectiv $s_2 \in \{0, 1, 3, \ldots, n-1\}$ astfel încît:

$$[mx]_r = m[x]_r + s_1 r, \quad [nx]_r = n[x]_r + s_2 r,$$

de unde prin scădere obținem:

$$[mx]_r - [nx]_r = (m - n)\,[x]_r + (s_1 - s_2)r.$$

Deoarece $s_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, $s_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ rezultă că $s_1 - s_2 \in \mathbf{Z}$ și notînd $s_1 - s_2 = q$ rezultă $|q| = |s_1 - s_2| < \max(m, n)$ și teorema este demonstrată.

Teorema 4.3.3. $(\forall)x \in \mathbf{R}$ *avem:*

$$\left[x + \frac{1}{2}r\right]_r = [2x]_r - [x]_r. \tag{7}$$

Demonstrație. Din relația (5) pentru $m = 2$ și $n = 1$ obținem:

$$[2x]_r - [x]_r = [x]_r + sr \tag{8}$$

unde $s \in \{0, 1\}$. Să mai observăm că dacă $x = [x]_r + \frac{s}{2}r + \alpha$ cu $s \in \{0, 1\}$ și $0 \leqslant \alpha < \frac{r}{2}$ atunci

$$\left[x + \frac{t}{2}r\right]_r = \begin{cases} [x]_r & \text{dacă } t = 0 \\ [x]_r + sr & \text{dacă } t = 1 \end{cases}$$

și deci conform cu (8) avem pentru $t = 1$ relația (7).

Teorema 4.3.4. *Dacă pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *notăm*

$$B_r(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{x + 2^i r}{2^{i+1}}\right]_r$$

şi

$$C_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_+ \\ r & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_-^* \end{cases}$$

atunci

$$B_r(x) = [x]_r + C_r(x). \tag{9}$$

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$0 \leqslant |x| < 2^k r \tag{10}$$

Dacă $x \in \mathbf{R}_+$ atunci din (10) obţinem $0 \leqslant x < 2^k r$ deci

$$2^k r \leqslant x + 2^k r < 2^{k+1} r$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{r}{2} \leqslant \frac{x + 2^k r}{2^{k+1}} < r$$

şi deci

$$\left[\frac{x + 2^k r}{2^{k+1}}\right]_r = 0.$$

Prin urmare pentru orice $i \geqslant k$ avem

$$\left[\frac{x + 2^i r}{2^{i+1}}\right]_r = 0.$$

Dacă însă $x \in \mathbf{R}_-^*$ atunci $0 > x > -2^k r \Leftrightarrow 2^k r > x + 2^k r > 0$ ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{r}{2} > \frac{x + 2^k r}{2^{k+1}} > 0$$

şi prin urmare

$$\left[\frac{x + 2^k r}{2^{k+1}}\right]_r = 0$$

de unde rezultă că pentru orice $i \geqslant k$ avem

$$\left[\frac{x + 2^i r}{2^{i+1}}\right]_r = 0.$$

Prin urmare, avem:

$$B_r(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{x + 2^i r}{2^{i+1}}\right]_r = \left[\frac{x+r}{2}\right]_r + \left[\frac{x+2r}{2^2}\right]_r + \\ + \left[\frac{x+2^2 r}{2^3}\right]_r + \ldots + \left[\frac{x+2^k r}{2^{k+1}}\right]_r. \qquad (11)$$

În baza teoremei 4.3.3 din relația precedentă obținem:

$$B_r(x) = [x]_r - \left[\frac{x}{2}\right]_r + \left[\frac{x}{2}\right]_r - \left[\frac{x}{2^2}\right]_r + \left[\frac{x}{2^2}\right]_r - \left[\frac{x}{2^3}\right]_r + \ldots - \\ - \left[\frac{x}{2^k}\right]_r + \left[\frac{x}{2^k}\right]_r - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]_r = [x]_r - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]_r = \\ = [x]_r - \left(\left[\frac{|x|}{2^{k+1}}\right]_r \operatorname{sign} x - A_r\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right).$$

Din (10) se observă că $\frac{x}{2^{k+2}} \in (-r, r)$ și deci $\frac{x}{2^{k+1}} \notin \mathbf{Z}_r$ de unde rezultă $\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]_r = 0$ și atunci

$$A_r = \left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R}_+ \\ -r, & x \in \mathbf{R}_-^* \end{cases}$$

iar relația (12) devine:

$$B_r(x) = [x]_r - A_r\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \begin{cases} [x]_r, & x \in \mathbf{R}_+ \\ [x]_r - r, & x \in \mathbf{R}_-^* \end{cases} = [x]_r + C_r(x)$$

și teorema este demonstrată. Aici am notat:

$$A_r(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{Z}_r \\ -r \text{ dacă } x \in \mathbf{R}_-^* - \mathbf{Z}_r \end{cases}.$$

Teorema 4.3.5. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *dacă notăm*

$$D_r(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{r(x + 2^i)}{2^{i+1}}\right]_r$$

atunci:

$$D_r(x) = [rx]_r + C_r(x).$$

Demonstrație. Dacă înlocuim rx cu y obținem că

$$D_r(x) = B_r(y) = [y]_r + C_r(y) = [rx]_r + C_r(rx) = [rx]_r + C_r(x)$$

și teorema este demonstrată.

4.4. Asupra reciprocelor teoremei CESARO-STOLZ

În această temă vom enunța două reciproce ale teoremei CESARO-STOLZ.

Teorema 4.4.1. (*Reciproca întîi a teoremei* CESARO-STOLZ.)

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *și* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *două șiruri de numere reale astfel încît:*

a). $0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

b). Există:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x \quad (\textit{finită sau infinită})$$

Atunci:

c). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x.$

Teorema 4.4.2. (*Reciproca a doua a teoremei* CESARO-STOLZ). *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *și* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *două șiruri de numere reale astfel încît:*

a). Există:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x \quad (\textit{finită sau } \pm\infty)$$

Atunci:

b). Șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *are proprietatea că:*

$$0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Teorema 4.4.1 nu este în general adevărată, ceea ce vom dovedi printr-un contraexemplu. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n}, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{n - (n-1)} = 2(-1)^n$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ nu există.

Nici teorema 4.4.2 nu este în general adevărată după cum dovedim cu următorul contraexemplu. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $a_n = b_n = (-1)^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Este evident că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = 1$$

și că șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ nu are proprietățile din concluzia teoremei 4.4.2

Vom demonstra mai departe că teorema 4.4.1 este adevărată dacă se adaugă o condiție în plus.

Teorema 4.4.3. *Dacă* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *și* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *sînt șiruri de numere reale, astfel încît:*

a). $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

b). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x$ *(finită sau infinită).*

c). Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = u \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ *și este egală cu* x.

Demonstrație. Avem:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n} + \frac{a_{n-1}}{b_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \cdot \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_n} =$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{b_{n-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

de unde prin trecere la limită după n obținem:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \cdot (1 - u) + xu,$$

de unde rezultă că

$$(1 - u)x = (1 - u) \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

și dacă ținem seama că $u \neq 1$ rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

În cazul în care $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$ nu există, sau există și este egală cu 1, nu ne putem pronunța asupra teoremei 4.4.1. După cum am arătat în contraexemplul dat mai sus în care $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ avem $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ și am arătat că teorema 4.4.1 nu este adevărată.

Din cele demonstrate mai sus rezultă că în cazul $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ pe care-l vom numi cazul de dubiu, teorema 4.4.1 s-ar putea să nu fie adevărată. Totuși vom arăta mai departe că și în acest caz teorema 4.4.1 rămîne uneori adevărată (vom da unele exemple), de aceea se impune a se cerceta ce condiții în plus trebuiesc adăugate pe lîngă condiția $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ astfel încît să fim siguri că teorema 4.4.1 este adevărată.

Exemplul 4.4.1. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}).$$

(Problema lui Traian Lalescu)

Soluția I. Vom folosi formula lui STIRLING[1]:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\frac{u_n}{12n}},\quad 0 < u_n < 1,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem deci:

$$\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{(n-1)\sqrt[n]{n!} - n\sqrt[n-1]{(n-1)!}}{n} =$$

$$= \frac{n-1}{e}\left(\sqrt[2n]{2\pi n}\, e^{\frac{u_n}{12n^2}} - \sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)}\, e^{\frac{\bar{u}_n}{12(n-1)^2}}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot\left(e^{\frac{u_n}{12n^2}} - 1\right) - \frac{n-1}{e}\cdot\sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\frac{\bar{u}_n}{12(n-2)^2}} - 1\right) - \frac{n-1}{e}\cdot\left(\sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)} - \sqrt[2n]{2\pi n}\right),$$

$$0 < u_n,\ \bar{u}_n < 1,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

[1] Stirling, James (1692–1770) – matematician scoțian.

și de asemenea, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{e}\cdot\sqrt[2n]{2\pi n}\left(e^{\frac{u_n}{12n^2}}-1\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)u_n}{12n^2}\cdot\frac{e^{\frac{u_n}{12n^2}}-1}{\frac{u_n}{12n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{e}\cdot\sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)}\cdot\left(e^{\frac{\overline{u}_n}{12(n-1)^2}}-1\right)=0.$$

Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$ avem:

$$0<\sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)}-\sqrt[2n]{2\pi n}=$$

$$=\frac{(2\pi(n-1))^n-(2\pi n)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{2n(n-1)}(2\pi(n-1)^{n-\frac{kn}{2n(n-2)}}(2\pi n)^{\frac{(k-1)(n-1)}{2n(n-1)}}}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{2\pi n}}{\sum_{k=1}^{2n(n-2)}(2\pi n)^{-\frac{k+n-1}{2n(n-1)}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{k}{2(n-1)}}}<\frac{1}{\sum_{k=1}^{2n(n-1)}(2\pi n)^{-\frac{k+n-1}{2n(n-1)}}}=$$

$$=\frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\left((2\pi n)^{\frac{1}{2n(n-1)}}-1\right)}{1-\frac{1}{2\pi n}}.$$

Dacă punem $a_n=(2\pi n)^{\frac{1}{2n(n-1)}}-1$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\left((2\pi n)^{\frac{1}{2n(n-1)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\pi+\ln(2n)}{2n}\cdot\frac{a_n}{\ln(1+a_n)}=0.$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\left(\sqrt[2(n-1)]{2\pi(n-1)}-\sqrt[2n]{2\pi n}\right)=0$$

și prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}-\sqrt[n-1]{(n-1)!}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=0.$$

Ţinînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

rezultă că limita din enunţ este $\frac{1}{e}$.

Observaţie. În cuprinsul cărţii am mai dat acestei probleme încă trei soluţii.

Soluţia a II-a. Aplicăm reciproca teoremei CESARO-STOLZ considerînd $a_n = \sqrt[n]{n!}$ şi $b_n = n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

şi deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!} = \frac{1}{e}.$$

Comentariu. După cum se observă $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ şi totuşi reciproca teoremei CESARO-STOLZ funcţionează. Care este deci condiţia care face ca ea să funcţioneze? (această a doua soluţie a fost dată chiar de TRAIAN LALESCU în „Gazeta Matematică", fără ca să observe că în general reciproca teoremei CESARO-STOLZ nu este adevărată). Pentru noi, această a doua soluţie nu este decît o verificare a faptului că în acest caz reciproca teoremei CESARO-STOLZ este adevărată.

Exemplul 4.4.2. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}} \right).$$

(M. Ghermănescu[1])

Soluţia I. Să notăm:

$$y_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}} - \frac{(n+1)^n}{n^n},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

[1] Ghermănescu, Mihail (1899—1962) — matematician român.

Avem deci că:

$$y_n = (n-1)\left(\frac{(n+1)^n}{n^n} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}\left(1 + n - \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} \cdot n\right) < e \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Deoarece $\frac{(n+1)^n}{n^n} > \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ și atunci obținem că limita cerută în enunț este egală cu e.

Soluția a II-a. Vom aplica reciproca teoremei CESARO-STOLZ considerînd:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \quad b_n = n, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

și obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Deci avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\right) = e.$$

Comentariu. Am aplicat reciproca teoremei CESARO-STOLZ în cazul de dubiu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$. După cum se constată din soluția I, limita obținută prin această metodă este corectă. Care este deci cauza care face ca și în acest caz reciproca teoremei CESARO-STOLZ să funcționeze?

Și în acest caz soluția a II-a nu este decît o verificare.

Exemplul 4.4.3. *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n-1]{(n-1)}\right).$$

Soluția I. Vom considera funcția $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\frac{x+1}{x}}$. Este evident că pe intervalul $[x, x+1]$ această funcție satisface condițiile din ipoteza teoremei lui LAGRANGE[1]

[1] Lagrange, Joseph Louis (1736–1813) — matematician și astronom francez.

și deci $(\forall)x \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)u_x \in (x, x+1)$ astfel încît $f(x+1) - f(x) = f'(u_x)$ și că dacă $x \to +\infty$ atunci și $u_x \to +\infty$.

Avem:

$$f(n) = n\sqrt[n]{n},\ f(n-1) = (n-1)\sqrt[n-1]{n-1}$$

și deci:

$$f(n) - f(n-1) = f'(u_{n-1}),$$

de unde se observă că limita din enunț este egală cu $\lim_{n\to\infty} f'(u_{n-1})$. Să calculăm deci $\lim_{n\to\infty} f'(x)$. Avem:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - \frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x^2}\ln x = x^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1 - \ln x}{x}\right) =$$

$$= e^{\frac{\ln x}{x}}\left(1 + \frac{1 - \ln x}{x}\right),$$

de unde, dacă trecem la limită și ținem seama că $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} f'(x) = 1$ și deci $\lim_{n\to\infty} f'(u_{n-1}) = 1$, ceea ce ne arată că limita din enunț este egală cu 1.

Soluția a II-a. Folosim reciproca teoremei CESARO-STOLZ în care considerăm $a_n = n\sqrt[n]{n}$, $b_n = n$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}$.

Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{u\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Comentariu. După cum se constată, și în acest caz reciproca teoremei CESARO-STOLZ funcționează.

Observație. Din cele de mai sus rezultă că dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, atunci se poate aplica reciproca teore-

mei CESARO-STOLZ. Dacă însă $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ (sîntem în cazul de dubiu) se procedează astfel: printr-un procedeu oarecare ne asigurăm de existența limitei:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$; calculăm $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x$, atunci avem și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x.$$

În exemplele date mai sus, soluția a II-a nu este decît o verificare a faptului că reciproca teoremei CESARO-STOLZ funcționează. Atragem atenția cititorilor că în cazul de dubiu $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1\right)$ nu este indicat a se aplica reciproca teoremei CESARO-STOLZ decît numai dacă ne-am asigurat că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ există. Cel mai indicat este a se rezolva problema prin alte metode.

Dăm în continuare două aplicații.

Aplicația 4.4.1. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de gradul* $m \in \mathbf{N}^*$ *cu proprietatea că* $P(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $P(X) = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \ldots + a_{m-1}X + a_m$, $a_0 > 0$.

Fie $A_n = \frac{1}{n} \cdot (P(1) + P(2) + \ldots + P(n))$,

$$G_n = \sqrt[n]{P(1)P(2)\ldots P(n)},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} = \frac{e^m}{m+1}.$$

(Tiberiu Popoviciu[1]*)*

Demonstrație. Să notăm

$s_{n,k} = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$ și $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

Cu ajutorul teoremei CESARO-STOLZ rezultă imediat că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,k}}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

[1] Popoviciu, Tiberiu (1906–1975) – matematician român.

Avem:

$$A_n = \frac{P(1) + P(2) + \ldots + P(n)}{n} =$$

$$= a_0 \cdot \frac{s_{n,m}}{n} + a_1 \cdot \frac{s_{n,m-1}}{n} + \ldots + a_m$$

de unde prin trecere la limită rezultă;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n^m} = \frac{a_0}{m+1}.$$

Ţinînd seama că dacă există $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ atunci există şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

şi este egală cu u şi punînd:

$$u_n = \ln \frac{P(n)}{n^m},$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ln a_0$$

şi deci avem:

$$\frac{\ln \frac{P(1)}{1} + \ln \frac{P(2)}{2} + \ldots + \ln \frac{P(n)}{n}}{n} = \ln \frac{G_n}{\sqrt[n]{(n!)^m}},$$

de unde rezultă:

$$\ln \lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{\sqrt[n]{(n!)^m}} = \ln a_0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{\sqrt[n]{(n!)^m}} = a_0.$$

Prin urmare, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} \left(\frac{\sqrt[n]{(n!)}}{n} \right)^m = \frac{1}{m+1} \ (*).$$

Se mai știe că dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = u$$

atunci există și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = u (u_n > 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*).$$

Luînd mai sus $u_n = \frac{n!}{n^n}$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Pe baza ultimei limite din (*) obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} = \frac{e^m}{m+1}.$$

Aplicația 4.4.2. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir de numere reale strict pozitive și* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un șir de numere reale strict crescător și nemărginit cu* $b_1 \in \mathbf{R}_+^*$ *astfel încît există* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$.

Se consideră șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *astfel încît* $y_0 = 0$ *și*

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^m}{x_i}, \quad z_n = \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{m+1}}{x_i}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

unde $m \in \mathbf{R}$ *și este fixat. Să se demonstreze că dacă există* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbf{R}$ *și dacă șirul* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent, atunci și șirul* $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este convergent la zero*

(D.M. Bătinețu)

Demonstrație. Pentru orice $i \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$y_i - y_{i-1} = \frac{a_i^m}{x_i}$$

de unde obținem:

$$a_i(y_i - y_{i-1}) = \frac{a_i^{m+1}}{x_i} \cdot \quad (\forall)\, i \in \mathbf{N}^*$$

și deci prin însumare rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i^{m+1}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(y_i - y_{i-1}) = a_{n+1}y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)y_i -$$

$$- a_1 y_0 = a_{n+1}y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i)y_i.$$

Din ultima egalitate prin împărțire cu b_{n+1} obținem

$$z_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot y_{n+1} - \frac{1}{b_{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)y_i$$

și deci:

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{b_{n+2} - b_{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} y_{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} y_{n+1} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{b_{n+2} - b_{n+1}} \right) = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = 0.$$

În această ultimă egalitate am aplicat teorema 4.4.3 ale cărei condiții sînt îndeplinite ipotezele problemei.

4.5. Funcții cu punct fix. Contracții. Șiruri recurente convergente

În această temă ne vom ocupa de definirea conceptelor matematice enunțate în titlul temei și de unele legături dintre aceste concepte.

Definiția 4.5.1. *Spunem că funcția* $f : A \to B$ *are proprietatea de punct fix dacă și numai dacă:*

a°). $A \cap B \neq \emptyset$;

b°). $(\exists)\, x_0 \in A \cap B$ *astfel încît* $f(x_0) = x_0$.

Punctul x_0 care satisface definiția precedentă se va numi un *punct fix* al funcției *f*.

Mai departe vom considera funcții $f : M \to M$ și atunci *f* are proprietatea de punct fix dacă și numai dacă există $x_0 \in M$ astfel încît $f(x_0) = x_0$.

Definiția 4.5.2. *Două funcții* $f, g : M \to M$ *comută între ele dacă și numai dacă :*

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \quad (\forall)x \in M \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f.$$

Teorema 4.5.1. *Dacă* $f, g : M \to M$ *comută între ele și dacă* f *are un punct fix unic, atunci și* g *are acest punct fix.*

Demonstrație. Fie $a \in M$ punctul fix al lui f. Deoarece f comută cu g, rezultă că:

$$(f \circ g)(a) = (g \circ f)(a) \Leftrightarrow f(g(a)) = g(f(a)) = g(a)$$

ceea ce ne arată că $g(a)$ este punct fix al lui f. Deoarece f are ca unic punct fix pe a rezultă că $g(a) = a$, adică a este punct fix și pentru g.

Teorema 4.5.2. *Fie* $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *astfel încît există un singur punct* $a \in \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $f(a) = g(a)$. *Să se demonstreze că dacă* h *comută cu funcția:*

$u = f - g + 1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *atunci* a *este punct fix pentru* h.

Demonstrație. Deoarece $u \circ h = h \circ u$ rezultă că:

$$(u \circ h)(a) = (h \circ u)(a) \Leftrightarrow u(h(a)) = h(u(a)).$$

Deoarece:

$$u(a) = (f - g + 1_{\mathbf{R}})(a) = f(a) - g(a) + 1_{\mathbf{R}}(a) =$$
$$= f(a) - g(a) + a = a = 1_{\mathbf{R}}(a),$$

deci a este punct fix pentru $1_{\mathbf{R}}$ și deoarece a este unicul punct pentru care $f(x) = g(x)$ rezultă că a este unicul punct fix al lui u. Deci $u(a) = a$. Din faptul că:
$u(h(a)) = h(u(a)) = h(a)$ rezultă că $h(a)$ este punct fix al lui u și cum u are ca unic punct fix pe a rezultă că $h(a) = a$ adică a este punct fix și pentru h.

Definiția 4.5.3. *O funcție* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *se spune că este o contracție (aplicație contractivă) dacă și numai dacă există* $q \in [0, 1)$ *astfel încît :*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant q\,|x - y|, \quad (\forall)\, x, y \in \mathbf{R}.$$

Teorema 4.5.3. *Dacă* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este o contracție, atunci există un unic punct* $x \in \mathbf{R}$ *astfel încît* $f(x^*) = x^*$.

Demonstrație. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ un punct arbitrar și să considerăm șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încît $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Să arătăm că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Pentru aceasta vom arăta că $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este șir fundamental. Într-adevăr, fie $m, n \in \mathbf{N}$ cu $m < n$ și să considerăm:

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |x_{n-1} - x_m| \leqslant q\,|x_{n-1} - x_{n-2}| + |x_{n-1} - x_m|$$

de unde rezultă:

$$|x_n - x_m| \leqslant q\,|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| + |x_{n-1} - x_m| \leqslant q^2\,|x_{n-2} - x_{n-3}| + |x_{n-1} - x_m|.$$

Continuînd acest procedeu obținem:

$$|x_n - x_m| \leqslant q^{n-1}\,|f(x_0) - x_0| + |x_{n-1} - x_m|.$$

Aplicînd și termenului $|x_{n-1} - x_m|$ această relație și înlocuind mai sus vom obține:

$$|x_n - x_m| \leqslant q^{n-1}\,|f(x_0) - x_0| + q^{n-2}\,|f(x_0) - x_0| + |x_{n-2} - x_m|.$$

Continuînd procedeul avem în final că:

$$|x_n - x_m| \leqslant (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^m)\,|f(x_0) - x_0| \leqslant q^m(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots)\,|f(x_0) - x_0| \leqslant q^m \cdot \frac{q}{1-q}\,|f(x_0) - x_0|.$$

Această relație ne arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ construit mai sus este un șir fundamental și deci este convergent adică există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in \mathbf{R}$. Să arătăm că x^* este un punct fix al lui f. Într-adevăr:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{(n+1)\text{ ori}}(x_0) = f\Big(\lim_{n\to\infty} \underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n\text{ ori}}(x_0)\Big) = f(x^*)$$

și deci x^* este un punct fix al lui f. Să arătăm că acesta este unicul punct fix al lui f. Într-adevăr, să presupunem că ar mai există $\bar{x} \in \mathbf{R}$ punct fix al lui f diferit de x^*. Avem:

$$| x^* - \bar{x} | = | f(x^*) - f(\bar{x}) | \leqslant q | x^* - \bar{x} |$$

ceea ce reprezintă o contradicție în raport cu faptul că $q < 1$.

Prin urmare, x^* este unic.

Ne punem acum problema în ce condiții un șir recurent $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_{n+1} = f(x_n)$, unde $f : M \subset \mathbf{R} \to M$, este convergent.

Evident că orice șir recurent depinde de funcția f și de condiția inițială $x_0 = a \in M$. Deci un șir recurent va fi convergent sau nu în funcție de condiția inițială pe care o verifică și de anumite proprietăți pe care le verifică funcția f care definește șirul recurent.

După cum am văzut mai sus, dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o contracție atunci indiferent de condiția inițială șirul recurent $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ este un șir convergent și are ca limită punctul fix al lui f.

Teorema 4.5.4. *Dacă* $f : M \subset \mathbf{R} \to M$ *este o funcție continuă și dacă* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *este un șir convergent de numere reale cu* $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ *atunci* $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ *este un punct fix al lui* f. *Dacă* f *este continuă și nu are puncte fixe, atunci șirul* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *cu* $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ *nu este convergent oricare ar fi condiția inițială pe care o satisface.*

Demonstrație. Deoarece f este continuă pe M trecînd la limită în relația de recurență $x_{n+1} = f(x_n)$, obținem $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = f(x^*)$. Prin urmare, dacă f este continuă pe M și are puncte fixe poate defini șiruri recurente convergente care satisfac anumite condiții inițiale. Remarcăm că nu este suficient ca f să fie continuă pe M și să aibă puncte fixe, ci este necesar ca și condițiile inițiale să satisfacă anumite condiții.

Pentru partea a doua a teoremei, vom presupune prin absurd că f este continuă pe M, nu admite puncte fixe, dar definește și șiruri convergente. Fie deci $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un șir convergent de numere reale cu $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Con-

form primei părți a demonstrației ar rezulta că limita acestui șir este un punct fix pentru f și aceasta este o contradicție.

Definiția 4.5.4. *Fiind dată funcția* $f : M \subset \mathbf{R} \to M$ *care admite puncte fixe, pentru orice punct fix* x^* *al lui* f *vom nota* $C(x^*) = \{x_0 \in M \mid$ *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ *este convergent și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*\}$. *Vom numi această mulțime, mulțimea de convergență a șirurilor recurente definite de* f *în raport cu punctul fix* x^*.

Din definiția de mai sus rezultă că dacă $f : M \subset \mathbf{R} \to M$ este continuă și admite cel puțin două puncte fixe distincte x^*, $\bar{x} \in M$ atunci $C(x^*) \cap C(\bar{x}) = \emptyset$.

Teorema 4.5.4. *Dacă* $f : M \subset \mathbf{R} \to M$ *admite un punct fix* $x^* \in M$ *și dacă* $x_0 \in C(x^*)$ *atunci șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu* $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ *având drept prim termen pe* x_0 *are proprietatea că* $x_n \in C(x^*)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. Este evident că orice termen al șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ poate fi considerat ca prim termen al unui anumit subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Deoarece șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent către x^* rezultă că orice subșir al său este convergent către x^* și deci primul termen al acestui subșir aparține lui $C(x^*)$.

Teorema 4.5.5. *Fiind dată funcția* $f : M \subset \mathbf{R} \to M$ *care este continuă pe* M *și admite puncte fixe. Dacă* $C_1(x^*)$, $C_2(x^*)$ *sînt mulțimi de convergență ale șirului* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ *în raport cu* x^*, *atunci și mulțimea* $C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$ *este o mulțime de convergență a acestui șir în raport cu punctul fix* x^*.

Demonstrație. Fie $x_0 \in C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$ un punct arbitrar. Deoarece $x_0 \in C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$ rezultă că $x_0 \in C_1(x^*)$ **V** $x_0 \in C_2(x^*)$. Să presupunem, de exemplu, că $x^* \in C_1(x^*)$; atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit de f prin $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ este convergent la x^*. Cum x_0 a fost arbitrar în $C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$ rezultă că oricare ar fi $x_0 \in C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$, șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent la x^* și deci $C_1(x^*) \cup C_2(x^*)$ este mulțime de convergență a șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ în raport cu punctul fix x^*.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

[1] ARAMĂ L., MOROZAN T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol. I, Editura tehnică, București, 1978.

[2] BĂTINEȚU M.D., ENE P.D., *Curs de matematici superioare. Culegere de probleme.* Centrul de multiplicare al Institutului Agronomic „Nicolae Bălcescu", București, 1972.

[3] BĂTINEȚU M.D., *Unele relații în legătură cu partea întreagă a unui număr real.* În: „Gazeta Matematică, seria B", nr. 7/1969, pp. 408—411.

[4] BĂTINEȚU M.D., *O generalizare a funcției partea întreagă a unui număr real.* În: „Gazeta Matematică, seria B", nr. 11/1970, pp. 641—651.

[5] BĂTINEȚU M.D., *Asupra șirurilor de elemente ale unei mulțimi.* În: „Gazeta Matematică, seria B", nr. 5/1971, pp. 274—277.

[6] BĂTINEȚU M.D., *O generalizare a problemei 9127 de la O.I.M., 1968.* În: „Gazeta Matematică, seria B", nr. 2/1971, pp. 84—88.

[7] BĂTINEȚU M.D., *O proprietate a unor polinoame.* În: „Gazeta Matematică, seria B", nr. 7/1971, pp. 401—402.

[8] BĂTINEȚU M.D., *Asupra unor recurențe de ordinul întîi.* În: Revista „Năzuințe" a Liceului „Matei Basarab" din București, 1979.

[9] BĂTINEȚU M.D., *Partea întreagă a unei matrici. Unele proprietăți și relații.* Comunicare susținută la Sesiunea Științifică a S.S.M., 2—4 septembrie 1977.

[10] BĂTINEȚU M.D., *O generalizare a funcției „parte întreagă" în spații vectoriale finit dimensionale.* Comunicare susținută la Sesiunea Științifică a Societății de Științe Matematice din 3—4 septembrie 1977.

[11] BĂTINEȚU M.D., STANCU-MINASIAN M.I., *Program pentru calculul radicalilor de diverse ordine.* În: „Gazeta Matematică, seria A", nr. 12/1973, pp. 443—446.

[12] CĂLUGĂRIȚA G., MANGU V., *Probleme de matematică pentru treapta I și a II-a de liceu,* vol. I și II, Editura Albatros, București, 1977.

[13] COOKE G. RICHARD, *Infinite matrices and sequence spaces,* London, 1950.

[14] DEMIDOVICI P.B., *Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică,* Editura tehnică, București, 1956.

[15] DOBRESCU EUGEN, *Analiză Matematică,* Editura didactică și pedagogică, București, 1974.

[16] FIHTENHOLT M.G., *Curs de calcul diferențial și integral, vol. I,* Editura tehnică, București, 1965.

[17] GELBAUM R.B., OLMSTED H.M.J., *Contraexemple în analiză,* Editura științifică, București, 1964.

[18] GÜNTER N.M., CUZMIN R.O., *Culegere de probleme de matematici superioare,* Editura tehnică, București, 1956.

[19] IONESCU V.D., *Complemente de matematici pentru licee,* Editura didactică și pedagogică, București, 1978.

[20] IONESCU-ȚIU D.C., PÎRȘAN LIVIU, *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate,* Editura Albatros, București, 1975.

[21] LEFORT G., *Algèbre et Analyse, Exercices,* Dunod, Paris, 1962.

[22] LIAȘCO I.I., BOIARCIUC K.A., GAI F. Ia., GOLOVACI P.G. *Analiză matematică în exemple și probleme,* (în limba rusă), Kiev, 1974.

[23] MARCUȘEVICI I.A., *Șiruri recurente,* Editura tehnică, București, 1953.

[24] MARON A.I., *Calcul diferențial și integral în exemple și probleme,* (în limba rusă), Moscova, 1973.

[25] MEGHEA C., *Bazele analizei matematice.* Editura științifică și enciclopedică, București, 1977.

[26] MITRINOVIĆ S.D., *Zbornic Matematičkih Problema,* (în limba sîrbă), vol. I, Belgrad, 1962.

[27] NICOLESCU MIRON, *Analiză matematică,* vol. I, Editura tehnică, București, 1957.

[28] NICOLESCU MIRON, DINCULEANU N., MARCUS SOLOMON, *Manual de analiză matematică, vol. I,* Editura didactică și pedagogică, București, 1962.

[29] POPA C., HIRIŞ VIOREL, MEGAN MIHAIL, *Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme*, Editura Facla, Timişoara, 1976.
[30] RUDIN WALTER, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, Book Company, New York, 1964.
[31] SIREŢCHI Gh., *Analiză matematică*, ediţia a IV-a, Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, 1978.
[32] VOROBIEV N.N., *Numerele lui Fibonacci*, Editura tehnică, Bucureşti, 1953.

CUPRINS

Din partea autorului 7

CAPITOLUL 0. Notaţii şi abrevieri, definiţii, teoreme, propoziţii, corolare 10

CAPITOLUL 1. Probleme rezolvate (1.1—1.220) 30

CAPITOLUL 2. Probleme propuse (2.1—2.215) 212

A — Enunţuri 212

B — Soluţii, indicaţii, răspunsuri 253

CAPITOLUL 3. Probleme alese (3.1—3.65) 406

CAPITOLUL 4. Teme pentru cercurile de matematică ale elevilor (4.1—4.5) 502

Bibliografie 531

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 29.V.1979. Apărut 1979. Comanda nr. 1482. Tiraj : 100 000 ex. legate. Coli de tipar : 33,5

Tiparul executat sub comanda nr. 90 104 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii" nr. 1, București — Republica Socialistă România